

Introduction into Calculus over Banach algebra

Aleks Kleyn

Aleks_Kleyn@MailAPS.org
<http://AleksKleyn.dyndns-home.com:4080/>
<http://sites.google.com/site/AleksKleyn/>
http://arxiv.org/a/kleyn_a_1
<http://AleksKleyn.blogspot.com/>

ABSTRACT. Let A be Banach D -algebra with norm $|a|$. The map

$$f : A \rightarrow A$$

is called differentiable on the set $U \subset A$, if at every point $x \in U$ the increment of map f can be represented as

$$f(x + dx) - f(x) = \partial_x f(x) \circ dx + o(dx) = \frac{\partial f(x)}{\partial x} \circ dx + o(dx)$$

where

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} : A \rightarrow A$$

is linear map of D -algebra A and

$$o : A \rightarrow A$$

is such continuous map that

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{|o(a)|}{|a|} = 0$$

Linear map $\frac{\partial f(x)}{\partial x}$ is called derivative of map f .

Assuming that we defined the derivative $\partial_{x^{n-1}}^{n-1} f(x)$ of order $n - 1$, we define

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n} \circ (a_1; \dots; a_n) &= \partial_{x^n}^n f(x) \circ (a_1; \dots; a_n) \\ &= \partial_x (\partial_{x^{n-1}}^{n-1} f(x) \circ (a_1; \dots; a_{n-1})) \circ a_n \end{aligned}$$

the derivative of order n of the map f . Since the map $f(x)$ has the derivative of any order, then the map $f(x)$ has Taylor series expansion

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f(x_0)}{\partial x^n} \circ (x - x_0)^n$$

Contents

Chapter 1. Preface	5
Chapter 2. Preliminary Definitions	7
2.1. Universal Algebra	7
2.2. Representation of Universal Algebra	8
2.3. Permutation	10
2.4. Module over Commutative Ring	10
2.5. Algebra over Commutative Ring	13
2.6. Polynomial over Associative D -Algebra	17
Chapter 3. Differentiable Maps	19
3.1. Topological Ring	19
3.2. Topological D -Algebra	20
3.3. The Derivative of Map of D -Algebra	22
Chapter 4. Derivative of Second Order of Map of D -Algebra	31
4.1. Derivative of Second Order of Map of D -Algebra	31
4.2. Taylor Series	32
Chapter 5. References	37
Chapter 6. Index	38
Chapter 7. Special Symbols and Notations	39

CHAPTER 1

Preface

The way of charms and disappointments.
 However, I would put it another way. When you understand that the reason for your disappointments is in your expectations, you start to examine surrounding landscape. You found yourself on the path where nobody went before. New impressions are stronger than impressions from travel along well known and trodden road.

Author is unknown. The Adventures of an Explorer.

The possibility of linear approximation of a map is at the heart of calculus and main constructions of calculus have their roots in linear algebra. Since the product in the field is commutative, then linear algebra over a field is relatively simple. When we explore algebra over commutative ring, we still see some familiar statements of linear algebra; however, we meet new statements, which change the landscape of linear algebra.

Here I want to draw attention to the evolution of the concept of the derivative from the time of Newton. When we study functions of single variable, the derivative in selected point is a number

$$(1) \quad dx^2 = 2x \, dx$$

When we study function of multiple variables, we realize that it is not enough to use number. The derivative becomes vector or gradient

$$z = x^2 + y^3$$

$$dz = 2x \, dx + 3y^2 \, dy$$

When we study maps of vector spaces, this is a first time that we tell about derivative as operator

$$x = u \sin v \quad y = u \cos v \quad z = u$$

$$dx = \sin v \, du + u \cos v \, dv \quad dy = \cos v \, du - u \sin v \, dv \quad dz = 1 \, du + 0 \, dv$$

However since this operator is linear, then we can represent derivative as matrix. Again we express a vector of increment of a map as product of a matrix of derivative (Jacobian matrix) over vector of increment of argument

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin v & u \cos v \\ \cos v & -u \sin v \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

To understand the structure of derivative of a map of Banach algebra, consider the map $y = x^2$ of quaternion algebra. Since the argument x has the increment dx , then the increment dy of the function y has form

$$(2) \quad dy = (x + dx)^2 - x^2 = x^2 + x dx + dx x + (dx)^2 - x^2 = x dx + dx x + (dx)^2$$

Since dx is infinitesimal, then we can ignore the value of $(dx)^2$ and, from the equality (2), it follows that

$$(3) \quad dy = x dx + dx x$$

If we assume that we can separate left or right factor in the expression (3)

$$(4) \quad x dx + dx x = a dx$$

like in the equality (1), then we see that the value a depends on direction of the differential dx . It is reason to assume that the derivative in quaternion algebra is directional derivative or the Gâteaux derivative ([17], page 322). In such case, we consider the differential (3) as additive map, namely, the map which satisfies the equality $f(a+b)=f(a)+f(b)$

Already in the process of working on the paper [3], I realized that I need to consider both left and right factors instead of the expression (4)

$$(5) \quad x dx + dx x = a dx b$$

However, I continued to consider the expression (5) as an additive map of the differential dx .

During exploring of the representation theory of universal algebra ([4, 6]), I realized that the expression (5) is linear map of the differential dx . So, the expression (3) is the definition of the derivative of the map $y = x^2$. This new concept is the basis of this paper.

CHAPTER 2

Preliminary Definitions

2.1. Universal Algebra

DEFINITION 2.1.1. For any sets^{2.1} A, B , **Cartesian power** B^A is the set of maps

$$f : A \rightarrow B$$

□

DEFINITION 2.1.2. For any $n \geq 0$, a map^{2.2}

$$\omega : A^n \rightarrow A$$

is called **n -ary operation on set A** or just **operation on set A** . For any $a_1, \dots, a_n \in A$, we use either notation $\omega(a_1, \dots, a_n)$, $a_1 \dots a_n \omega$ to denote image of map ω . □

REMARK 2.1.3. According to definitions 2.1.1, 2.1.2, n -ary operation $\omega \in A^{A^n}$. □

DEFINITION 2.1.4. An **operator domain** is the set of operators^{2.3} Ω with a map

$$a : \Omega \rightarrow N$$

If $\omega \in \Omega$, then $a(\omega)$ is called the **arity** of operator ω . If $a(\omega) = n$, then operator ω is called n -ary. We use notation

$$\Omega(n) = \{\omega \in \Omega : a(\omega) = n\}$$

for the set of n -ary operators. □

DEFINITION 2.1.5. Let A be a set. Let Ω be an operator domain.^{2.4} The family of maps

$$\Omega(n) \rightarrow A^{A^n} \quad n \in N$$

is called **Ω -algebra structure on A** . The set A with Ω -algebra structure is called **Ω -algebra** A_Ω or **universal algebra**. The set A is called **carrier of Ω -algebra**. □

The operator domain Ω describes a set of Ω -algebras. An element of the set Ω is called operator, because an operation assumes certain set. According to the remark 2.1.3 and the definition 2.1.5, for each operator $\omega \in \Omega(2)$ n -ary operation ω on A is associated.

^{2.1} I follow the definition from the example (iv) on the page [8]-5.

^{2.2} Definition 2.1.2 follows the definition in the example (vi) on the page page [8]-13.

^{2.3} I follow the definition (1), page [8]-48.

^{2.4} I follow the definition (2), page [8]-48.

DEFINITION 2.1.6. Let A, B be Ω -algebras and $\omega \in \Omega(n)$. The map^{2.5}

$$f : A \rightarrow B$$

is compatible with operation ω , if, for all $a_1, \dots, a_n \in A$,

$$(2.1.1) \quad f(a_1) \dots f(a_n) \omega = f(a_1 \dots a_n \omega)$$

The map f is called **homomorphism** from Ω -algebra A to Ω -algebra B , if f is compatible with each $\omega \in \Omega$. \square

DEFINITION 2.1.7. A homomorphism in which source and target are the same algebra is called **endomorphism**. \square

2.2. Representation of Universal Algebra

DEFINITION 2.2.1. Let the set A be Ω -algebra. Endomorphism $t \in \text{End}(\Omega; A)$ is called **transformation of universal algebra A** . \square

DEFINITION 2.2.2. Let the set A_2 be Ω_2 -algebra. Let the set of transformations $\text{End}(\Omega_2; A_2)$ be Ω_1 -algebra. The homomorphism

$$f : A_1 \rightarrow \text{End}(\Omega_2; A_2)$$

of Ω_1 -algebra A_1 into Ω_1 -algebra $\text{End}(\Omega_2; A_2)$ is called **representation of Ω_1 -algebra A_1 or A_1 -representation in Ω_2 -algebra A_2** . \square

We also use notation

$$f : A_1 \dashrightarrow A_2$$

to denote the representation of Ω_1 -algebra A_1 in Ω_2 -algebra A_2 .

DEFINITION 2.2.3. Let the map

$$f : A_1 \rightarrow \text{End}(\Omega_2; A_2)$$

be an isomorphism of the Ω_1 -algebra A_1 into $\text{End}(\Omega_2; A_2)$. Then the representation

$$f : A_1 \dashrightarrow A_2$$

of the Ω_1 -algebra A_1 is called **effective**.^{2.6} \square

DEFINITION 2.2.4. Let

$$f : A_1 \dashrightarrow A_2$$

be representation of Ω_1 -algebra A_1 in Ω_2 -algebra A_2 and

$$g : B_1 \dashrightarrow B_2$$

be representation of Ω_1 -algebra B_1 in Ω_2 -algebra B_2 . For $i = 1, 2$, let the map

$$r_i : A_i \rightarrow B_i$$

be homomorphism of Ω_j -algebra. The matrix of maps $(r_1 \ r_2)$ such, that

$$(2.2.1) \quad r_2 \circ f(a) = g(r_1(a)) \circ r_2$$

is called **morphism of representations from f into g** . We also say that **morphism of representations of Ω_1 -algebra in Ω_2 -algebra** is defined. \square

^{2.5} I follow the definition on page [8]-49.

^{2.6} See similar definition of effective representation of group in [13], page 16, [15], page 111, [9], page 51 (Cohn calls such representation faithful).

REMARK 2.2.5. We may consider a pair of maps r_1, r_2 as map

$$F : A_1 \cup A_2 \rightarrow B_1 \cup B_2$$

such that

$$F(A_1) = B_1 \quad F(A_2) = B_2$$

Therefore, hereinafter the matrix of maps $(r_1 \ r_2)$ also is called map. \square

DEFINITION 2.2.6. If representation f and g coincide, then morphism of representations $(r_1 \ r_2)$ is called **morphism of representation** f . \square

DEFINITION 2.2.7. Let

$$f : A_1 \multimap A_2$$

be representation of Ω_1 -algebra A_1 in Ω_2 -algebra A_2 and

$$g : A_1 \multimap B_2$$

be representation of Ω_1 -algebra A_1 in Ω_2 -algebra B_2 . Let

$$\left(\text{id} : A_1 \rightarrow A_1 \quad r_2 : A_2 \rightarrow B_2 \right)$$

be morphism of representations. In this case we identify morphism of (id, R) representations of Ω_1 -algebra and corresponding homomorphism R of Ω_2 -algebra and the homomorphism R is called **reduced morphism of representations**. We will use diagram

(2.2.2)

to represent reduced morphism R of representations of Ω_1 -algebra. From diagram it follows

(2.2.3)
$$r_2 \circ f(a) = g(a) \circ r_2$$

We also use diagram

instead of diagram (2.2.2). \square

2.3. Permutation

DEFINITION 2.3.1. *An injective map of finite set into itself is called **Permutation**.*^{2.7} \square

Usually we write a permutation σ as a matrix

$$(2.3.1) \quad \sigma = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ \sigma(a_1) & \dots & \sigma(a_n) \end{pmatrix}$$

The notation (2.3.1) is equivalent to the statement

$$\sigma : a \in A \rightarrow \sigma(a) \in A \quad A = \{a_1, \dots, a_n\}$$

So the order of columns in the notation (2.3.1) is not essential.

2.4. Module over Commutative Ring

DEFINITION 2.4.1. *Let commutative ring D has unit 1. Effective representation*

$$(2.4.1) \quad f : D \dashrightarrow V \quad f(d) : v \rightarrow dv$$

*of ring D in an Abelian group V is called **module over ring D or D -module**. Effective representation (2.4.1) of commutative ring D in an Abelian group V is called **vector space over field D or D -vector space**.* \square

THEOREM 2.4.2. *Following conditions hold for D -module:*

- **associative law**

$$(2.4.2) \quad (ab)m = a(bm)$$

- **distributive law**

$$(2.4.3) \quad a(m + n) = am + an$$

$$(2.4.4) \quad (a + b)m = am + bm$$

- **unitarity law**

$$(2.4.5) \quad 1m = m$$

for any $a, b \in D, m, n \in V$.

PROOF. The theorem follows from the theorem [6]-4.1.3. \square

DEFINITION 2.4.3. *Let A_1, A_2 be D -modules. Reduced morphism of representations*

$$f : A_1 \rightarrow A_2$$

*of D -module A_1 into D -module A_2 is called **linear map** of D -module A_1 into D -module A_2 . Let us denote $\mathcal{L}(D; A_1; A_2)$ set of linear maps of D -module A_1 into D -module A_2 .* \square

^{2.7} You can see definition and properties of permutation in [2], pages 27 - 32, [9], pages 58, 59.

THEOREM 2.4.4. *Linear map*

$$f : A_1 \rightarrow A_2$$

of D -module A_1 into D -module A_2 satisfies to equations^{2.8}

$$(2.4.6) \quad f \circ (a + b) = f \circ a + f \circ b$$

$$(2.4.7) \quad f \circ (pa) = p(f \circ a)$$

$$a, b \in A_1 \quad p \in D$$

PROOF. The theorem follows from the theorem [6]-4.2.2. \square

THEOREM 2.4.5. *Let map*

$$f : A_1 \rightarrow A_2$$

be linear map of D -module A_1 into D -module A_2 . Then

$$f \circ 0 = 0$$

PROOF. The theorem follows from the theorem [6]-4.2.5. \square

DEFINITION 2.4.6. Let D be the commutative ring. Let A_1, \dots, A_n, S be D -modules. We call map

$$f : A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow S$$

polylinear map of modules A_1, \dots, A_n into module S , if

$$f \circ (a_1, \dots, a_i + b_i, \dots, a_n) = f \circ (a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) + f \circ (a_1, \dots, b_i, \dots, a_n)$$

$$f \circ (a_1, \dots, pa_i, \dots, a_n) = pf \circ (a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)$$

$$1 \leq i \leq n \quad a_i, b_i \in A_i \quad p \in D$$

\square

DEFINITION 2.4.7. Let A_1, \dots, A_n be free modules over commutative ring D .^{2.9} Consider category \mathcal{A}_1 whose objects are polylinear maps

$$f : A_1 \times \dots \times A_n \longrightarrow S_1 \quad g : A_1 \times \dots \times A_n \longrightarrow S_2$$

where S_1, S_2 are modules over ring D . We define morphism

$$f \rightarrow g$$

to be linear map

$$h : S_1 \rightarrow S_2$$

making following diagram commutative

$$\begin{array}{ccc} & & S_1 \\ & \nearrow f & \downarrow h \\ A_1 \times \dots \times A_n & & S_2 \\ & \searrow g & \end{array}$$

^{2.8}In some books (for instance, [1], p. 119) the theorem 2.4.4 is considered as a definition.

^{2.9}I give definition of tensor product of D -modules following to definition in [1], p. 601 - 603.

Universal object $A_1 \otimes \dots \otimes A_n$ of category \mathcal{A}_1 is called **tensor product** of modules A_1, \dots, A_n . \square

THEOREM 2.4.8. Let D be the commutative ring. Let A_1, \dots, A_n be D -modules. Tensor product is distributive over sum

$$(2.4.8) \quad \begin{aligned} & a_1 \otimes \dots \otimes (a_i + b_i) \otimes \dots \otimes a_n \\ &= a_1 \otimes \dots \otimes a_i \otimes \dots \otimes a_n + a_1 \otimes \dots \otimes b_i \otimes \dots \otimes a_n \\ & a_i, b_i \in A_i \end{aligned}$$

The representation of the ring D in tensor product is defined by equation

$$(2.4.9) \quad \begin{aligned} & a_1 \otimes \dots \otimes (ca_i) \otimes \dots \otimes a_n = c(a_1 \otimes \dots \otimes a_i \otimes \dots \otimes a_n) \\ & a_i \in A_i \quad c \in D \end{aligned}$$

PROOF. The theorem follows from the theorem [6]-4.4.3. \square

THEOREM 2.4.9. Let A_1, \dots, A_n be modules over commutative ring D . Tensor product

$$f : A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow A_1 \otimes \dots \otimes A_n$$

exists and unique. We use notation

$$f \circ (a_1, \dots, a_n) = a_1 \otimes \dots \otimes a_n$$

for image of the map f . Let

$$g : A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow V$$

be polylinear map into D -module V . There exists a linear map

$$h : A_1 \otimes \dots \otimes A_n \rightarrow V$$

such that the diagram

$$(2.4.10) \quad \begin{array}{ccc} & & A_1 \otimes \dots \otimes A_n \\ & \nearrow f & \downarrow h \\ A_1 \times \dots \times A_n & & V \\ & \searrow g & \end{array}$$

is commutative. The map h is defined by the equation

$$(2.4.11) \quad h \circ (a_1 \otimes \dots \otimes a_n) = g \circ (a_1, \dots, a_n)$$

PROOF. See the proof of theorems [6]-4.4.2, [6]-4.4.4. \square

CONVENTION 2.4.10. Algebras S_1, S_2 may be different sets. However they are indistinguishable for us when we consider them as isomorphic representations. In such case, we write the statement $S_1 = S_2$. \square

THEOREM 2.4.11.

$$(2.4.12) \quad (A_1 \otimes A_2) \otimes A_3 = A_1 \otimes (A_2 \otimes A_3) = A_1 \otimes A_2 \otimes A_3$$

PROOF. The theorem follows from the theorem [6]-3.4.5. \square

DEFINITION 2.4.12. *Tensor product*

$$A^{\otimes n} = A_1 \otimes \dots \otimes A_n \quad A_1 = \dots = A_n = A$$

is called **tensor power** of module A_1 . □

THEOREM 2.4.13. *The map*

$$(v_1, \dots, v_n) \in V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow v_1 \otimes \dots \otimes v_n \in V_1 \otimes \dots \otimes V_n$$

is *polylinear map*.

PROOF. The theorem follows from the theorem [6]-4.4.5. □

THEOREM 2.4.14. *Let \bar{e}_i be the basis of module A_i over ring D . We can represent any tensor $a \in A_1 \otimes \dots \otimes A_n$ in the following form*

$$(2.4.13) \quad a = a^{i_1 \dots i_n} e_{1 \cdot i_1} \otimes \dots \otimes e_{n \cdot i_n}$$

Expression $a^{i_1 \dots i_n}$ is called **standard component of tensor**.

PROOF. The theorem follows from the theorem [6]-4.4.6. □

2.5. Algebra over Commutative Ring

DEFINITION 2.5.1. *Let D be commutative ring. D -module A_1 is called **algebra over ring D** or **D -algebra**, if we defined product^{2.10} in A_1*

$$(2.5.1) \quad v w = C \circ (v, w)$$

where C is bilinear map

$$C : A \times A \rightarrow A$$

If A_1 is free D -module, then A_1 is called **free algebra over ring D** . □

THEOREM 2.5.2. *The multiplication in the algebra A_1 is distributive over addition.*

PROOF. The theorem follows from the theorem [6]-5.1.2. □

CONVENTION 2.5.3. *Element of D -algebra A is called **A -number**. For instance, complex number is also called **C -number**, and quaternion is called **H -number**. □*

The multiplication in algebra can be neither commutative nor associative. Following definitions are based on definitions given in [16], page 13.

DEFINITION 2.5.4. *The **commutator***

$$[a, b] = ab - ba$$

measures commutativity in D -algebra A_1 . D -algebra A_1 is called **commutative**, if

$$[a, b] = 0$$

□

^{2.10} I follow the definition given in [16], p. 1, [7], p. 4. The statement which is true for any D -module, is true also for D -algebra.

DEFINITION 2.5.5. The **associator**

$$(2.5.2) \quad (a, b, c) = (ab)c - a(bc)$$

measures associativity in D -algebra A_1 . D -algebra A_1 is called **associative**, if

$$(a, b, c) = 0$$

□

DEFINITION 2.5.6. The set^{2.11}

$$N(A) = \{a \in A : \forall b, c \in A, (a, b, c) = (b, a, c) = (b, c, a) = 0\}$$

is called the **nucleus of an D -algebra A_1** .

□

DEFINITION 2.5.7. The set^{2.12}

$$Z(A) = \{a \in A : a \in N(A), \forall b \in A, ab = ba\}$$

is called the **center of an D -algebra A_1** .

□

CONVENTION 2.5.8. Let A be free algebra with finite or countable basis. Considering expansion of element of algebra A relative basis \bar{e} we use the same root letter to denote this element and its coordinates. In expression a^2 , it is not clear whether this is component of expansion of element a relative basis, or this is operation $a^2 = aa$. To make text clearer we use separate color for index of element of algebra. For instance,

$$a = a^i e_i$$

□

Let \bar{e} be the basis of free algebra A_1 over ring D . If algebra A_1 has unit, then we assume that e_0 is the unit of algebra A_1 .

THEOREM 2.5.9. Let \bar{e} be the basis of free algebra A_1 over ring D . Let

$$a = a^i e_i \quad b = b^i e_i \quad a, b \in A$$

We can get the product of a, b according to rule

$$(2.5.3) \quad (ab)^k = C_{ij}^k a^i b^j$$

where C_{ij}^k are **structural constants** of algebra A_1 over ring D . The product of basis vectors in the algebra A_1 is defined according to rule

$$(2.5.4) \quad e_i e_j = C_{ij}^k e_k$$

PROOF. The theorem follows from the theorem [6]-5.1.9.

□

DEFINITION 2.5.10. Let A_1 and A_2 be algebras over ring D . The linear map of the D -module A_1 into the D -module A_2 is called **linear map** of D -algebra A_1 into D -algebra A_2 . Let us denote $\mathcal{L}(D; A_1; A_2)$ set of linear maps of D -algebra A_1 into D -algebra A_2 .

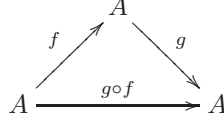
□

^{2.11} The definition is based on the similar definition in [16], p. 13

^{2.12} The definition is based on the similar definition in [16], p. 14

THEOREM 2.5.11. Let A be algebra over commutative ring D . D -module $\mathcal{L}(D; A; A)$ equipped by product

$$(2.5.5) \quad \circ : (g, f) \in \mathcal{L}(D; A; A) \times \mathcal{L}(D; A; A) \rightarrow g \circ f \in \mathcal{L}(D; A; A)$$



is algebra over D .

PROOF. The theorem follows from the theorem [6]-6.2.5. □

DEFINITION 2.5.12. Let A_1, \dots, A_n, S be D -algebras. Polylinear map

$$f : A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow S$$

of D -modules A_1, \dots, A_n into D -module S is called **polylinear map** of D -algebras A_1, \dots, A_n into D -algebra S . Let us denote $\mathcal{L}(D; A_1, \dots, A_n; S)$ set of polylinear maps of D -algebras A_1, \dots, A_n into D -algebra S . Let us denote $\mathcal{L}(D; A^n; S)$ set of n -linear maps of D -algebra A_1 ($A_1 = \dots = A_n = A_1$) into D -algebra S . □

THEOREM 2.5.13. Tensor product $A_1 \otimes \dots \otimes A_n$ of D -algebras A_1, \dots, A_n is D -algebra.

PROOF. The theorem follows from the theorem [6]-6.1.3. □

THEOREM 2.5.14. Let A_1 be associative D -algebra. The representation

$$(2.5.6) \quad h : A \otimes A \longrightarrow \mathcal{L}(D; A; A) \quad h(p) : f \rightarrow p \circ f$$

of D -module $A_1 \otimes A_1$ is defined by the equation

$$(2.5.7) \quad (a \otimes b) \circ f = a f b \quad a, b \in A \quad f \in \mathcal{L}(D; A; A)$$

The representation (2.5.6) generates product \circ in D -module $A_1 \otimes A_1$ according to rule

$$(p \circ q) \circ a = p \circ (q \circ a)$$

$$(2.5.8) \quad (p_0 \otimes p_1) \circ (q_0 \otimes q_1) = (p_0 q_0) \otimes (q_1 p_1)$$

The representation (2.5.6) of algebra $A_1 \otimes A_1$ in module $\mathcal{L}(D; A; A)$ allows us to identify tensor $d \in A_1 \otimes A_1$ and linear map $d \circ \delta \in \mathcal{L}(D; A; A)$ where $\delta \in \mathcal{L}(D; A; A)$ is identity map. Linear map generated by tensor $a \otimes b \in A_1 \otimes A_1$ has form

$$(2.5.9) \quad (a \otimes b) \circ c = a c b$$

PROOF. The theorem follows from the theorem [6]-6.3.4. □

CONVENTION 2.5.15. I assume sum over index i in expression like

$$a_{i,0} x a_{i,1}$$

□

THEOREM 2.5.16. Consider D -algebra A_1 and associative D -algebra A_2 . Consider the representation of algebra $A_2 \otimes A_2$ in the module $\mathcal{L}(D; A_1; A_2)$. The map

$$h : A_1 \rightarrow A_2$$

generated by the map

$$f : A_1 \rightarrow A_2$$

has form

$$(2.5.10) \quad h = (a_{s \cdot 0} \otimes a_{s \cdot 1}) \circ f = a_{s \cdot 0} f a_{s \cdot 1}$$

PROOF. The theorem follows from the theorem [6]-6.3.6. \square

THEOREM 2.5.17. Let A_1 be algebra over the ring D . Let A_2 be free finite dimensional associative algebra over the ring D . Let \bar{e} be basis of the algebra A_2 over the ring D . The map

$$(2.5.11) \quad g = a \circ f$$

generated by the map $f \in \mathcal{L}(D; A_1; A_2)$ through the tensor $a \in A_2 \otimes A_2$, has the standard representation

$$(2.5.12) \quad g = a^{ij} (e_i \otimes e_j) \circ f = a^{ij} e_i f e_j$$

PROOF. The theorem follows from the theorem [6]-6.4.1. \square

THEOREM 2.5.18. Let \bar{e}_1 be basis of the free finite dimensional D -algebra A_1 . Let \bar{e}_2 be basis of the free finite dimensional associative D -algebra A_2 . Let $C_2^{p_{kl}}$ be structural constants of algebra A_2 . Coordinates g_l^k of the map

$$g = a \circ f$$

generated by the map $f \in \mathcal{L}(D; A_1; A_2)$ through the tensor $a \in A_2 \otimes A_2$ and its standard components g^{ij} are connected by the equation

$$(2.5.13) \quad g_l^k = f_l^m g^{ij} C_2^{p_{im}} C_2^{k_{pj}}$$

PROOF. The theorem follows from the theorem [6]-6.4.2. \square

THEOREM 2.5.19. Let A be associative D -algebra. Polylinear map

$$(2.5.14) \quad f : A^n \rightarrow A, a = f \circ (a_1, \dots, a_n)$$

generated by maps $I_{s \cdot 1}, \dots, I_{s \cdot n} \in \mathcal{L}(D; A; A)$ has form

$$(2.5.15) \quad a = f_{s \cdot 0}^n \sigma_s(I_{s \cdot 1} \circ a_1) f_{s \cdot 1}^n \dots \sigma_s(I_{s \cdot n} \circ a_n) f_{s \cdot n}^n$$

where σ_s is a transposition of set of variables $\{a_1, \dots, a_n\}$

$$\sigma_s = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ \sigma_s(a_1) & \dots & \sigma_s(a_n) \end{pmatrix}$$

PROOF. The theorem follows from the theorem [6]-6.6.6. \square

CONVENTION 2.5.20. Since the tensor $a \in A^{\otimes(n+1)}$ has the expansion

$$a = a_{i \cdot 0} \otimes a_{i \cdot 1} \otimes \dots \otimes a_{i \cdot n} \quad i \in I$$

then set of permutations $\sigma = \{\sigma_i \in S(n) : i \in I\}$ and tensor a generate the map

$$(a, \sigma) : A^{\times n} \rightarrow A$$

defined by rule

$$\begin{aligned}(a, \sigma) \circ (b_1, \dots, b_n) &= (a_{i,0} \otimes a_{i,1} \otimes \dots \otimes a_{i,n}, \sigma_i) \circ (b_1, \dots, b_n) \\ &= a_{i,0} \sigma_i(b_1) a_{i,1} \dots \sigma_i(b_n) a_{i,n}\end{aligned}$$

□

2.6. Polynomial over Associative D -Algebra

Let D be commutative ring and A be associative D -algebra with unit.

THEOREM 2.6.1. Let $p_k(x)$ be **monomial of power k** over D -algebra A . Then

2.6.1.1: Monomial of power 0 has form $p_0(x) = a_0$, $a_0 \in A$.

2.6.1.2: If $k > 0$, then

$$p_k(x) = p_{k-1}(x) x a_k$$

where $a_k \in A$.

PROOF. The theorem follows from the theorem [5]-4.1. □

In particular, monomial of power 1 has form $p_1(x) = a_0 x a_1$.

DEFINITION 2.6.2. We denote $A_k[x]$ Abelian group generated by the set of monomials of power k . Element $p_k(x)$ of Abelian group $A_k[x]$ is called **homogeneous polynomial of power k** . □

CONVENTION 2.6.3. Let the tensor $a \in A^{\otimes(n+1)}$. When $x_1 = \dots = x_n = x$, we assume

$$a \circ x^n = a \circ (x_1 \otimes \dots \otimes x_n)$$

□

THEOREM 2.6.4. We can present homogeneous polynomial $p(x)$ in the following form

$$p(x) = a_k \circ x^k \quad a_k \in A^{\otimes(k+1)}$$

PROOF. The theorem follows from the theorem [5]-4.6. □

DEFINITION 2.6.5. We denote

$$A[x] = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n[x]$$

direct sum^{2.13} of A -modules $A_n[x]$. An element $p(x)$ of A -module $A[x]$ is called **polynomial over D -algebra A** . □

^{2.13}See the definition of direct sum of modules in [1], page 128. On the same page, Lang proves the existence of direct sum of modules.

CHAPTER 3

Differentiable Maps

3.1. Topological Ring

DEFINITION 3.1.1. Ring D is called **topological ring**^{3.1} if D is topological space and the algebraic operations defined in D are continuous in the topological space D . \square

According to definition, for arbitrary elements $a, b \in D$ and for arbitrary neighborhoods W_{a-b} of the element $a - b$, W_{ab} of the element ab there exists neighborhoods W_a of the element a and W_b of the element b such that $W_a - W_b \subset W_{a-b}$, $W_a W_b \subset W_{ab}$.

DEFINITION 3.1.2. **Norm on ring** D is a map^{3.2}

$$d \in D \rightarrow |d| \in R$$

which satisfies the following axioms

- $|a| \geq 0$
- $|a| = 0$ if, and only if, $a = 0$
- $|ab| = |a| |b|$
- $|a + b| \leq |a| + |b|$

Ring D , endowed with the structure defined by a given norm on D , is called **normed ring**. \square

Invariant distance on additive group of ring D

$$d(a, b) = |a - b|$$

defines topology of metric space, compatible with ring structure of D .

DEFINITION 3.1.3. Let D be normed ring. Element $a \in D$ is called **limit of a sequence** $\{a_n\}$

$$a =$$

if for every $\epsilon \in R$, $\epsilon > 0$, there exists positive integer n_0 depending on ϵ and such, that

$$|a_n - a| < \epsilon$$

for every $n > n_0$. \square

THEOREM 3.1.4. Let D be normed ring of characteristic 0 and let $d \in D$. Let $a \in D$ be limit of a sequence $\{a_n\}$. Then

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n d) &= ad \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (da_n) &= da \end{aligned}$$

^{3.1} I made definition according to definition from [12], chapter 4

^{3.2} I made definition according to definition from [10], IX, §3.2 and definition [18]-1.1.12, p. 23.

PROOF. Statement of the theorem is trivial, however I give this proof for completeness sake. Since $a \in D$ is limit of the sequence $\{a_n\}$, then according to definition 3.1.3 for given $\epsilon \in R$, $\epsilon > 0$, there exists positive integer n_0 such, that

$$|a_n - a| < \frac{\epsilon}{|d|}$$

for every $n > n_0$. According to definition 3.1.2 the statement of theorem follows from inequalities

$$|a_n d - ad| = |(a_n - a)d| = |a_n - a||d| < \frac{\epsilon}{|d|}|d| = \epsilon$$

$$|da_n - da| = |d(a_n - a)| = |d||a_n - a| < |d|\frac{\epsilon}{|d|} = \epsilon$$

for any $n > n_0$. □

DEFINITION 3.1.5. Let D be normed ring. The sequence $\{a_n\}$, $a_n \in D$ is called **fundamental** or **Cauchy sequence**, if for every $\epsilon \in R$, $\epsilon > 0$ there exists positive integer n_0 depending on ϵ and such, that $|a_p - a_q| < \epsilon$ for every $p, q > n_0$. □

DEFINITION 3.1.6. Normed ring D is called **complete** if any fundamental sequence of elements of ring D converges, i.e. has limit in ring D . □

Later on, speaking about normed ring of characteristic 0, we will assume that homeomorphism of field of rational numbers Q into ring D is defined.

THEOREM 3.1.7. Complete ring D of characteristic 0 contains as subfield an isomorphic image of the field R of real numbers. It is customary to identify it with R .

PROOF. Consider fundamental sequence of rational numbers $\{p_n\}$. Let p' be limit of this sequence in ring D . Let p be limit of this sequence in field R . Since immersion of field Q into division ring D is homeomorphism, then we may identify $p' \in D$ and $p \in R$. □

THEOREM 3.1.8. Let D be complete ring of characteristic 0 and let $d \in D$. Then any real number $p \in R$ commute with d .

PROOF. Let us represent real number $p \in R$ as fundamental sequence of rational numbers $\{p_n\}$. Statement of theorem follows from chain of equalities

$$pd = \lim_{n \rightarrow \infty} (p_n d) = \lim_{n \rightarrow \infty} (dp_n) = dp$$

based on statement of theorem 3.1.4. □

3.2. Topological D -Algebra

DEFINITION 3.2.1. Given a topological commutative ring D and D -algebra A such that A has a topology compatible with the structure of the additive group of A and maps

$$(a, v) \in D \times A \rightarrow av \in A$$

$$(v, w) \in A \times A \rightarrow vw \in A$$

are continuous, then A is called a **topological D -algebra**^{3.3}. □

^{3.3} I made definition according to definition from [11], p. TVS I.1

DEFINITION 3.2.2. **Norm on D -algebra A over normed commutative ring D** ^{3.4} is a map

$$a \in A \rightarrow |a| \in R$$

which satisfies the following axioms

- $|a| \geq 0$
- $|a| = 0$ if, and only if, $a = 0$
- $|a + b| \leq |a| + |b|$
- $|ab| \leq |a| |b|$
- $|da| = |d| |a|$, $d \in D$, $a \in A$

If D is a normed commutative ring, D -algebra A , endowed with the structure defined by a given norm on A , is called **normed D -algebra**. \square

DEFINITION 3.2.3. Let A be normed D -algebra. Element $a \in A$ is called **limit of a sequence** $\{a_n\}$

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

if for every $\epsilon \in R$, $\epsilon > 0$, there exists positive integer n_0 depending on ϵ and such, that $|a_n - a| < \epsilon$ for every $n > n_0$. \square

DEFINITION 3.2.4. Let A be normed D -algebra. The sequence $\{a_n\}$, $a_n \in A$, is called **fundamental** or **Cauchy sequence**, if for every $\epsilon \in R$, $\epsilon > 0$, there exists positive integer n_0 depending on ϵ and such, that $|a_p - a_q| < \epsilon$ for every $p, q > n_0$. \square

DEFINITION 3.2.5. Normed D -algebra A is called **Banach D -algebra** if any fundamental sequence of elements of algebra A converges, i.e. has limit in algebra A . \square

DEFINITION 3.2.6. Let A be Banach D -algebra. Set of elements $a \in A$, $|a| = 1$, is called **unit sphere in algebra A** . \square

DEFINITION 3.2.7. A map

$$f : A_1 \rightarrow A_2$$

of Banach D_1 -algebra A_1 with norm $|x|_1$ into Banach D_2 -algebra A_2 with norm $|y|_2$ is called **continuous**, if for every as small as we please $\epsilon > 0$ there exist such $\delta > 0$, that

$$|x' - x|_1 < \delta$$

implies

$$|f(x') - f(x)|_2 < \epsilon$$

\square

DEFINITION 3.2.8. Let

$$f : A_1 \rightarrow A_2$$

be map of Banach D_1 -algebra A_1 with norm $|x|_1$ into Banach D_2 -algebra A_2 with norm $|y|_2$. Value

$$(3.2.1) \quad \|f\| = \sup \frac{|f(x)|_2}{|x|_1}$$

is called **norm of map f** . \square

^{3.4} I made definition according to definition from [10], IX, §3.3. If D -algebra A is division algebra, then norm is called **absolute value**. See the definition from [10], IX, §3.2.

We also use notation $\|a\|$ for norm of A -number a .

THEOREM 3.2.9. *Let*

$$f : A_1 \rightarrow A_2$$

be linear map of Banach D_1 -algebra A_1 with norm $|x|_1$ into Banach D_2 -algebra A_2 with norm $|y|_2$. Then

$$(3.2.2) \quad \|f\| = \sup\{|f(x)|_2 : |x|_1 = 1\}$$

PROOF. From definitions 2.4.3, 2.5.10, 3.3.1 and theorems 3.1.7, 3.1.8, it follows that

$$(3.2.3) \quad f(rx) = rf(x) \quad r \in R$$

From the equality (3.2.3) and the definition 3.2.2 it follows that

$$\frac{|f(rx)|_2}{|rx|_1} = \frac{|r| |f(x)|_2}{|r| |x|_1} = \frac{|f(x)|_2}{|x|_1}$$

Assuming $r = \frac{1}{|x|_1}$, we get

$$(3.2.4) \quad \frac{|f(x)|_2}{|x|_1} = \left| f\left(\frac{x}{|x|_1}\right) \right|_2$$

Equality (3.2.2) follows from equalities (3.2.4) and (3.2.1). \square

THEOREM 3.2.10. *Let*

$$f : A_1 \rightarrow A_2$$

be linear map of Banach D_1 -algebra A_1 with norm $|x|_1$ into Banach D_2 -algebra A_2 with norm $|y|_2$. Since $\|f\| < \infty$, then map f is continuous.

PROOF. Since map f is linear, then according to definition 3.2.8

$$|f(x) - f(y)|_2 = |f(x - y)|_2 \leq \|f\| |x - y|_1$$

Let us assume arbitrary $\epsilon > 0$. Assume $\delta = \frac{\epsilon}{\|f\|}$. Then

$$|f(x) - f(y)|_2 \leq \|f\| \delta = \epsilon$$

follows from inequality

$$|x - y|_1 < \delta$$

According to definition 3.2.7 map f is continuous. \square

3.3. The Derivative of Map of D -Algebra

DEFINITION 3.3.1. *Let A be Banach D -algebra. The map*

$$f : A \rightarrow A$$

*is called **differentiable** on the set $U \subset A$, if at every point $x \in U$ the increment of map f can be represented as*

$$(3.3.1) \quad f(x + dx) - f(x) = \partial_x f(x) \circ dx + o(dx) = \frac{\partial f(x)}{\partial x} \circ dx + o(dx)$$

where

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} : A \rightarrow A$$

is linear map of D -algebra A and

$$o : A \rightarrow A$$

is such continuous map that

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{|o(a)|}{|a|} = 0$$

Linear map $\frac{\partial f(x)}{\partial x}$ is called **derivative of map** f . \square

DEFINITION 3.3.2. Since, for given x , we consider the increment (3.3.1) of the map

$$f : A \rightarrow A$$

as function of differential dx of variable x , then the linear part of this function

$$df = \partial_x f(x) \circ dx = \frac{\partial f(x)}{\partial x} \circ dx$$

is called **differential of map** f . \square

REMARK 3.3.3. According to definition 3.3.1, for given x , the derivative

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} \in \mathcal{L}(D; A; A)$$

Therefore, the derivative of the map f is the map

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} : A \rightarrow \mathcal{L}(D; A; A)$$

Expressions $\partial_x f(x)$ and $\frac{\partial f(x)}{\partial x}$ are different notations for the same map. \square

CONVENTION 3.3.4. Complex field is the algebra over real field. In the theory of functions of complex variable we consider only linear maps generated by map $I_0 \circ x = x$. Therefore, exploring derivatives, we also restrict ourselves to linear maps generated by the map I_0 . To write expressions in the general case is not difficult. \square

THEOREM 3.3.5. It is possible to represent the derivative of the map f as

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f(x)}{\partial x} \circ dx = \left(\frac{\partial_{s,0} f(x)}{\partial x} \otimes \frac{\partial_{s,1} f(x)}{\partial x} \right) \circ dx \\ (3.3.2) \quad &= \frac{\partial_{s,0} f(x)}{\partial x} dx \frac{\partial_{s,1} f(x)}{\partial x} \end{aligned}$$

Expression $\frac{\partial_{s,p} f(x)}{\partial x}$, $p = 0, 1$, is called **component of derivative** of map $f(x)$.

PROOF. The theorem follows from the definitions 3.3.1, from the convention 3.3.4 and from the theorem 2.5.16. \square

THEOREM 3.3.6. Definitions of the derivative (3.3.1) is equivalent to the definition

$$(3.3.3) \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x} \circ a = \lim_{t \rightarrow 0, t \in R} (t^{-1}(f(x + ta) - f(x)))$$

PROOF. From definitions 2.4.3, 2.5.10, 3.3.1 and the theorem 3.1.7 it follows

$$(3.3.4) \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x} \circ (ta) = t \frac{\partial f(x)}{\partial x} \circ a$$

$$t \in R \quad t \neq 0 \quad a \in A \quad a \neq 0$$

Combining equality (3.3.4) and definition 3.3.1, we get the definition (3.3.3) of the derivative. \square

COROLLARY 3.3.7. *A map f is called differentiable on the set $U \subset D$, if at every point $x \in U$ the increment of the map f can be represented as*

$$(3.3.5) \quad f(x + ta) - f(x) = t \frac{\partial f(x)}{\partial x} \circ a + o(t)$$

where $o : R \rightarrow A$ is such continuous map that

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{|o(t)|}{|t|} = 0$$

\square

THEOREM 3.3.8. *Let A be Banach D -algebra. Let \bar{e} be basis of algebra A over ring D . **Standard representation of derivative of map***

$$f : A \rightarrow A$$

has form

$$(3.3.6) \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{\partial^{ij} f(x)}{\partial x} e_i \otimes e_j$$

Expression $\frac{\partial^{ij} f(x)}{\partial x}$ in equality (3.3.6) is called **standard component of derivative of the map f** .

PROOF. Statement of theorem follows from the convention 3.3.4 and from the theorem 2.5.16. \square

THEOREM 3.3.9. *Let A be Banach D -algebra. Let \bar{e} be a basis of algebra A over ring D . Then it is possible to represent the derivative of the map*

$$f : A \rightarrow A$$

as

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} \circ dx = dx^i \frac{\partial f^j}{\partial x^i} e_j$$

where $dx \in A$ has expansion

$$dx = dx^i e_i \quad dx^i \in D$$

relative to basis \bar{e} and Jacobian matrix of map f has form

$$(3.3.7) \quad \frac{\partial f^j}{\partial x^i} = \frac{\partial^{kr} f(x)}{\partial x} C_{ki}^p C_{pr}^j$$

PROOF. Statement of theorem follows from the theorem 2.5.18. \square

THEOREM 3.3.10. *Let A be Banach D -algebra. Let f, g be differentiable maps*

$$f : A \rightarrow A \quad g : A \rightarrow A$$

The map

$$f + g : A \rightarrow A$$

is differentiable and the derivative satisfies to relationship

$$(3.3.8) \quad \partial_x(f + g)(x) = \partial_x f(x) + \partial_x g(x)$$

PROOF. According to the definition (3.3.3),

$$\begin{aligned}
 \partial_x(f+g)(x) \circ a &= \lim_{t \rightarrow 0, t \in R} (t^{-1}((f+g)(x+ta) - (f+g)(x))) \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0, t \in R} (t^{-1}(f(x+ta) + g(x+ta) - f(x) - g(x))) \\
 (3.3.9) \quad &= \lim_{t \rightarrow 0, t \in R} (t^{-1}(f(x+ta) - f(x))) \\
 &\quad + \lim_{t \rightarrow 0, t \in R} (t^{-1}(g(x+ta) - g(x))) \\
 &= \partial_x f(x) \circ a + \partial_x g(x) \circ a
 \end{aligned}$$

The equality (3.3.8) follows from the equality (3.3.9). \square

THEOREM 3.3.11. *Let A be Banach D -algebra. Let*

$$h : A \times A \rightarrow A$$

be continuous bilinear map. Let f, g be differentiable maps

$$f : A \rightarrow A \quad g : A \rightarrow A$$

The map

$$h(f, g) : A \rightarrow A$$

is differentiable and the differential satisfies to relationship

$$(3.3.10) \quad \partial_x h(f(x), g(x)) \circ dx = h(\partial_x f(x) \circ dx, g(x)) + h(f(x), \partial_x g(x) \circ dx)$$

PROOF. Equality (3.3.10) follows from chain of equalities

$$\begin{aligned}
 \partial_x h(f(x), g(x)) \circ a &= \lim_{t \rightarrow 0} (t^{-1}(h(f(x+ta), g(x+ta)) - h(f(x), g(x)))) \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} (t^{-1}(h(f(x+ta), g(x+ta)) - h(f(x), g(x+ta)))) \\
 &\quad + \lim_{t \rightarrow 0} (t^{-1}(h(f(x), g(x+ta)) - h(f(x), g(x)))) \\
 &= h(\lim_{t \rightarrow 0} t^{-1}(f(x+ta) - f(x)), g(x)) \\
 &\quad + h(f(x), \lim_{t \rightarrow 0} t^{-1}(g(x+ta) - g(x)))
 \end{aligned}$$

based on definition (3.3.3). \square

CONVENTION 3.3.12. *Given bilinear map*

$$h : A \times A \rightarrow A$$

we consider following maps

$$h_1 : \mathcal{L}(D; A; A) \times A \rightarrow \mathcal{L}(D; A; A)$$

$$h_2 : A \times \mathcal{L}(D; A; A) \rightarrow \mathcal{L}(D; A; A)$$

defined by equality

$$h_1(f, v) \circ u = h(f \circ u, v)$$

$$h_2(u, f) \circ v = h(u, f \circ v)$$

We will use letter h to denote maps h_1, h_2 . \square

THEOREM 3.3.13. *Let A be Banach D -algebra. Let*

$$h : A \times A \rightarrow A$$

be continuous bilinear map. Let f, g be differentiable maps

$$f : A \rightarrow A \quad g : A \rightarrow A$$

The map

$$h(f, g) : A \rightarrow A$$

is differentiable and the derivative satisfies to relationship

$$(3.3.11) \quad \partial_x h(f(x), g(x)) = h(\partial_x f(x), g(x)) + h(f(x), \partial_x g(x))$$

PROOF. Equality (3.3.11) follows from the equality (3.3.10) and from the convention 3.3.12. \square

THEOREM 3.3.14. *Let A be Banach D -algebra. Let f, g be differentiable maps*

$$f : A \rightarrow A \quad g : A \rightarrow A$$

The derivative satisfies to relationship

$$(3.3.12) \quad \begin{aligned} \frac{\partial f(x)g(x)}{\partial x} \circ dx &= \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x} \circ dx \right) g(x) + f(x) \left(\frac{\partial g(x)}{\partial x} \circ dx \right) \\ \frac{\partial f(x)g(x)}{\partial x} &= \frac{\partial f(x)}{\partial x} g(x) + f(x) \frac{\partial g(x)}{\partial x} \end{aligned}$$

PROOF. The theorem follows from theorems 3.3.11, 3.3.13 and the definition 2.5.1. \square

THEOREM 3.3.15. *Let A be Banach D -algebra. Let the derivative of the map*

$$f : A \rightarrow A$$

have expansion

$$(3.3.13) \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{\partial_{s \cdot 0} f(x)}{\partial x} \otimes \frac{\partial_{s \cdot 1} f(x)}{\partial x}$$

Let the derivative of the map

$$g : A \rightarrow A$$

have expansion

$$(3.3.14) \quad \frac{\partial g(x)}{\partial x} = \frac{\partial_{t \cdot 0} g(x)}{\partial x} \otimes \frac{\partial_{t \cdot 1} g(x)}{\partial x}$$

The derivative of the map $f(x)g(x)$ have form

$$(3.3.15) \quad \frac{\partial f(x)g(x)}{\partial x} = \frac{\partial_{s \cdot 0} f(x)}{\partial x} \otimes \left(\frac{\partial_{s \cdot 1} f(x)}{\partial x} g(x) \right) + \left(f(x) \frac{\partial_{t \cdot 0} g(x)}{\partial x} \right) \otimes \frac{\partial_{t \cdot 1} g(x)}{\partial x}$$

$$(3.3.16) \quad \begin{aligned} \frac{\partial_{s \cdot 0} f(x)g(x)}{\partial x} &= \frac{\partial_{s \cdot 0} f(x)}{\partial x} & \frac{\partial_{t \cdot 0} f(x)g(x)}{\partial x} &= f(x) \frac{\partial_{t \cdot 0} g(x)}{\partial x} \\ \frac{\partial_{s \cdot 1} f(x)g(x)}{\partial x} &= \frac{\partial_{s \cdot 1} f(x)}{\partial x} g(x) & \frac{\partial_{t \cdot 1} f(x)g(x)}{\partial x} &= \frac{\partial_{t \cdot 1} g(x)}{\partial x} \end{aligned}$$

PROOF. Let us substitute (3.3.13) and (3.3.14) into equality (3.3.12)

$$(3.3.17) \quad \begin{aligned} \frac{\partial f(x)g(x)}{\partial x} \circ a &= \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x} \circ a \right) g(x) + f(x) \left(\frac{\partial g(x)}{\partial x} \circ a \right) \\ &= \frac{\partial_{s,0}f(x)}{\partial x} a \frac{\partial_{s,1}f(x)}{\partial x} g(x) + f(x) \frac{\partial_{t,0}g(x)}{\partial x} a \frac{\partial_{t,1}g(x)}{\partial x} \end{aligned}$$

Based (3.3.17), we define equalities (3.3.16). \square

THEOREM 3.3.16. *Let A be Banach D -algebra. Let f, g be differentiable maps*

$$f : A \rightarrow A \quad g : A \rightarrow A$$

The derivative satisfies to relationship

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x) \otimes g(x)}{\partial x} \circ dx &= \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x} \circ dx \right) \otimes g(x) + f(x) \otimes \left(\frac{\partial g(x)}{\partial x} \circ dx \right) \\ \frac{\partial f(x) \otimes g(x)}{\partial x} &= \frac{\partial f(x)}{\partial x} \otimes g(x) + f(x) \otimes \frac{\partial g(x)}{\partial x} \end{aligned}$$

PROOF. The theorem follows from the theorems 3.3.11, 3.3.13, 2.4.13 and the definition 2.5.1. \square

REMARK 3.3.17. *Let*

$$(3.3.18) \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{\partial_{s,0}f(x)}{\partial x} \otimes \frac{\partial_{s,1}f(x)}{\partial x}$$

$$(3.3.19) \quad \frac{\partial g(x)}{\partial x} = \frac{\partial_{t,0}g(x)}{\partial x} \otimes \frac{\partial_{t,1}g(x)}{\partial x}$$

Then

$$(3.3.20) \quad \frac{\partial f(x) \otimes g(x)}{\partial x} = \frac{\partial_{s,0}f(x)}{\partial x} \otimes \frac{\partial_{s,1}f(x)}{\partial x} \otimes g(x) + f(x) \otimes \frac{\partial_{t,0}g(x)}{\partial x} \otimes \frac{\partial_{t,1}g(x)}{\partial x}$$

We do not write brackets, because tensor product is associative and distributive over addition (theorems 2.4.8, 2.4.11). \square

THEOREM 3.3.18. *Let A be Banach D -algebra. If the derivative $\partial_x f(x)$ exists in point x and has finite norm, then map f is continuous at point x .*

PROOF. From definition 3.2.8 it follows

$$(3.3.21) \quad |\partial_x f(x) \circ a| \leq \|\partial_x f(x)\| |a|$$

From (3.3.1), (3.3.21) it follows

$$(3.3.22) \quad |f(x+a) - f(x)| < |a| \|\partial_x f(x)\|$$

Let us assume arbitrary $\epsilon > 0$. Assume

$$\delta = \frac{\epsilon}{\|\partial_x f(x)\|}$$

Then from inequality

$$|a| < \delta$$

it follows

$$|f(x+a) - f(x)| \leq \|\partial_x f(x)\| \delta = \epsilon$$

According to definition 3.2.7 map f is continuous at point x . \square

THEOREM 3.3.19. *Let A be Banach D -algebra. Let map*

$$f : A \rightarrow A$$

be differentiable at point x . Then

$$\partial_x f(x) \circ 0 = 0$$

PROOF. The theorem follows from the definitions 3.3.1 and from the theorem 2.4.5. \square

THEOREM 3.3.20. *Let A be Banach D -algebra. Let map*

$$f : A \rightarrow A$$

be differentiable at point x and norm of the derivative of map f be finite

$$(3.3.23) \quad \|\partial_x f(x)\| = F \leq \infty$$

Let map

$$g : A \rightarrow A$$

be differentiable at point

$$(3.3.24) \quad y = f(x)$$

and norm of the derivative of map g be finite

$$(3.3.25) \quad \|\partial_y g(y)\| = G \leq \infty$$

The map^{3.5}

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

is differentiable at point x

$$(3.3.26) \quad \begin{cases} \partial_x (g \circ f)(x) = \partial_{f(x)} g(f(x)) \circ \partial_x f(x) \\ \partial_x (g \circ f)(x) \circ a = \partial_{f(x)} g(f(x)) \circ \partial_x f(x) \circ a \end{cases}$$

$$(3.3.27) \quad \begin{cases} \frac{\partial_{st \cdot 0} (g \circ f)(x)}{\partial x} = \frac{\partial_{s \cdot 0} g(f(x))}{\partial f(x)} \frac{\partial_{t \cdot 0} f(x)}{\partial x} \\ \frac{\partial_{st \cdot 1} (g \circ f)(x)}{\partial x} = \frac{\partial_{t \cdot 1} f(x)}{\partial x} \frac{\partial_{s \cdot 1} g(f(x))}{\partial f(x)} \end{cases}$$

PROOF. According to definition 3.3.1

$$(3.3.28) \quad g(y + b) - g(y) = \partial_y g(y) \circ b + o_1(b)$$

where $o_1 : A \rightarrow A$ is such continuous map that

$$\lim_{b \rightarrow 0} \frac{|o_1(b)|}{|b|} = 0$$

According to definition 3.3.1

$$(3.3.29) \quad f(x + a) - f(x) = \partial_x f(x) \circ a + o_2(a)$$

^{3.5} The notation

$$\partial_{f(x)} g(f(x)) = \frac{\partial g(f(x))}{\partial f(x)}$$

means expression

$$\partial_{f(x)} g(f(x)) = \partial_y g(y)|_{y=f(x)} = \frac{\partial g(y)}{\partial y} \Big|_{y=f(x)}$$

Similar remark is true for components of derivative.

where $o_2 : A \rightarrow A$ is such continuous map that

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{|o_2(a)|}{|a|} = 0$$

According to (3.3.29) increment a of value $x \in A$ leads to increment

$$(3.3.30) \quad b = \partial_x f(x) \circ a + o_2(a)$$

of value y . Using (3.3.24), (3.3.30) in equality (3.3.28), we get

$$(3.3.31) \quad \begin{aligned} & g(f(x+a)) - g(f(x)) \\ &= g(f(x) + \partial_x f(x) \circ a + o_2(a)) - g(f(x)) \\ &= \partial_{f(x)} g(f(x)) \circ (\partial_x f(x) \circ a + o_2(a)) - o_1(\partial_x f(x) \circ a + o_2(a)) \end{aligned}$$

According to definitions 2.4.3, 2.5.10, 3.3.1, from equality (3.3.31) it follows

$$(3.3.32) \quad \begin{aligned} g(f(x+a)) - g(f(x)) &= \partial_{f(x)} g(f(x)) \circ \partial_x f(x) \circ a \\ &\quad + \partial_{f(x)} g(f(x)) \circ o_2(a) - o_1(\partial_x f(x) \circ a + o_2(a)) \end{aligned}$$

According to definition 3.2.2

$$(3.3.33) \quad \begin{aligned} & \lim_{a \rightarrow 0} \frac{|\partial_{f(x)} g(f(x)) \circ o_2(a) - o_1(\partial_x f(x) \circ a + o_2(a))|}{|a|} \\ & \leq \lim_{a \rightarrow 0} \frac{|\partial_{f(x)} g(f(x)) \circ o_2(a)|}{|a|} + \lim_{a \rightarrow 0} \frac{|o_1(\partial_x f(x) \circ a + o_2(a))|}{|a|} \end{aligned}$$

From (3.3.25) it follows that

$$(3.3.34) \quad \lim_{a \rightarrow 0} \frac{|\partial_{f(x)} g(f(x)) \circ o_2(a)|}{|a|} \leq G \lim_{a \rightarrow 0} \frac{|o_2(a)|}{|a|} = 0$$

From (3.3.23) it follows that

$$\begin{aligned} & \lim_{a \rightarrow 0} \frac{|o_1(\partial_x f(x) \circ a + o_2(a))|}{|a|} \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{|o_1(\partial_x f(x) \circ a + o_2(a))|}{|\partial_x f(x) \circ a + o_2(a)|} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{|\partial_x f(x) \circ a + o_2(a)|}{|a|} \\ &\leq \lim_{a \rightarrow 0} \frac{|o_1(\partial_x f(x) \circ a + o_2(a))|}{|\partial_x f(x) \circ a + o_2(a)|_2} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\|\partial_x f(x)\| |a| + |o_2(a)|}{|a|} \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{|o_1(\partial_x f(x) \circ a + o_2(a))|}{|\partial_x f(x) \circ a + o_2(a)|} \|\partial_x f(x)\| \end{aligned}$$

According to the theorem 3.3.19

$$\lim_{a \rightarrow 0} (\partial_x f(x) \circ a + o_2(a)) = 0$$

Therefore,

$$(3.3.35) \quad \lim_{a \rightarrow 0} \frac{|o_1(\partial_x f(x) \circ a + o_2(a))|}{|a|} = 0$$

From equalities (3.3.33), (3.3.34), (3.3.35) it follows

$$(3.3.36) \quad \lim_{a \rightarrow 0} \frac{|\partial_{f(x)} g(f(x)) \circ o_2(a) - o_1(\partial_x f(x) \circ a + o_2(a))|}{|a|} = 0$$

According to definition 3.3.1

$$(3.3.37) \quad (g \circ f)(x+a) - (g \circ f)(x) = \partial_x (g \circ f)(x) \circ a + o(a)$$

where

$$o : A \rightarrow A$$

is such continuous map that

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{|o(a)|}{|a|} = 0$$

Equality (3.3.26) follows from (3.3.32), (3.3.36), (3.3.37).

From equality (3.3.26) and theorem 3.3.5, it follows that

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial_{st.0}(g \circ f)(x)}{\partial x} \circ_a \frac{\partial_{st.1}(g \circ f)(x)}{\partial x} \\
 (3.3.38) \quad &= \frac{\partial_{s.0}g(f(x))}{\partial f(x)} (\partial_x f(x) \circ a) \frac{\partial_{s.1}g(f(x))}{\partial f(x)} \\
 &= \frac{\partial_{s.0}g(f(x))}{\partial f(x)} \frac{\partial_{t.0}f(x)}{\partial x} \circ_a \frac{\partial_{t.1}f(x)}{\partial x} \frac{\partial_{s.1}g(f(x))}{\partial f(x)}
 \end{aligned}$$

(3.3.27) follow from equality (3.3.38). □

Derivative of Second Order of Map of D -Algebra

4.1. Derivative of Second Order of Map of D -Algebra

Let D be the complete commutative ring of characteristic 0. Let A be associative D -algebra. Let

$$f : A \rightarrow A$$

be differentiable map. According to the remark 3.3.3, the derivative is map

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} : A \rightarrow \mathcal{L}(D; A; A)$$

According to the theorem 2.5.11 and the definition 3.2.8, set $\mathcal{L}(D; A; A)$ is Banach D -algebra. Therefore, we may consider the question, if map $\partial_x f$ is differentiable.

According to the definition 3.3.1,

$$(4.1.1) \quad (\partial_x f \circ (x + a_2)) \circ a_1 - (\partial_x f \circ x) \circ a_1 = \partial_x(\partial_x f(x) \circ a_1) \circ a_2 + o_2(a_2)$$

where $o_2 : A \rightarrow \mathcal{L}(D; A; A)$ is such continuous map, that

$$\lim_{a_2 \rightarrow 0} \frac{\|o_2(a_2)\|}{|a_2|} = 0$$

According to definition 3.3.1, the map $\partial_x(\partial_x f(x) \circ a_1) \circ a_2$ is linear map of variable a_2 . From the equality (4.1.1) it follows that map $\partial_x(\partial_x f(x) \circ a_1) \circ a_2$ is linear map of variable a_1 . Therefore, the map $\partial_x(\partial_x f(x) \circ a_1) \circ a_2$ is bilinear map.

DEFINITION 4.1.1. *Polylinear map*

$$(4.1.2) \quad \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \circ (a_1; a_2) = \partial_{x^2}^2 f(x) \circ (a_1; a_2) = \partial_x(\partial_x f(x) \circ a_1) \circ a_2$$

is called **derivative of second order** of map f . □

REMARK 4.1.2. According to definition 4.1.1 for given x the derivative of second order $\partial_{x^2}^2 f(x) \in \mathcal{L}(D; A, A; A)$. Therefore, the derivative of second order of the map f is map

$$(4.1.3) \quad \partial_{x^2}^2 f : A \rightarrow \mathcal{L}(D; A, A; A)$$

According to the theorem 2.4.9, we may consider also expression

$$\partial_{x^2}^2 f(x) \circ (a_1 \otimes a_2) = \partial_{x^2}^2 f(x) \circ (a_1; a_2)$$

Then

$$(4.1.4) \quad \begin{aligned} \partial_{x^2}^2 f(x) &\in \mathcal{L}(D; A \otimes A; A) \\ \partial_{x^2}^2 f : A &\rightarrow \mathcal{L}(D; A \otimes A; A) \end{aligned}$$

We use the same notation $\partial_{x^2}^2 f$ for maps (4.1.3) and (4.1.4) because of the nature of the argument it is clear what kind of map we consider. □

THEOREM 4.1.3. *It is possible to represent the derivative of second order of the map f as*

$$\begin{aligned}\partial_{x^2}^2 f(x) \circ (a_1; a_2) &= \left(\frac{\partial_{s,0}^2 f(x)}{\partial x^2} \otimes \frac{\partial_{s,1}^2 f(x)}{\partial x^2} \otimes \frac{\partial_{s,2}^2 f(x)}{\partial x^2}, \sigma_s \right) \circ (a_1; a_2) \\ &= \frac{\partial_{s,0}^2 f(x)}{\partial x^2} \sigma_s(a_1) \frac{\partial_{s,1}^2 f(x)}{\partial x^2} \sigma_s(a_2) \frac{\partial_{s,2}^2 f(x)}{\partial x^2}\end{aligned}$$

Expression

$$\frac{\partial_{s,p}^2 f(x)}{\partial x^2} \quad p = 0, 1, 2$$

is called **component of derivative of second order** of map $f(x)$.

PROOF. The theorem follow from the definition 4.1.1, from the convention 3.3.4 and from the theorem 2.5.19. \square

By induction, assuming that we defined the derivative $\partial_{x^{n-1}}^{n-1} f(x)$ of order $n-1$, we define

$$\begin{aligned}(4.1.5) \quad \frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n} \circ (a_1; \dots; a_n) &= \partial_{x^n}^n f(x) \circ (a_1; \dots; a_n) \\ &= \partial_x (\partial_{x^{n-1}}^{n-1} f(x) \circ (a_1; \dots; a_{n-1})) \circ a_n\end{aligned}$$

derivative of order n of map f . We also assume $\partial^0 f(x) = f(x)$.

4.2. Taylor Series

Let D be the complete commutative ring of characteristic 0. Let A be associative D -algebra. Let $p_n(x)$ be the monomial of power n , $n > 0$, in one variable over D -algebra A .

THEOREM 4.2.1. *For any $m > 0$ the following equality is true*

$$\begin{aligned}(4.2.1) \quad \partial_{x^m}^m (f(x)x) \circ (h_1; \dots; h_m) &= \partial_{x^m}^m f(x) \circ (h_1; \dots; h_m)x \\ &+ \partial_{x^{m-1}}^{m-1} f(x) \circ (\widehat{h_1}; \dots; h_{m-1}; h_m)h_1 + \dots \\ &+ \partial_{x^{m-1}}^{m-1} f(x) \circ (h_1; \dots; h_{m-1}; \widehat{h_m})h_m\end{aligned}$$

where symbol $\widehat{h^i}$ means absense of variable h^i in the list.

PROOF. For $m = 1$, this is corollary of the equality (3.3.12)

$$\partial_x (f(x)x) \circ h_1 = (\partial_x f(x) \circ h_1)x + f(x)h_1$$

Assume, (4.2.1) is true for $m-1$. Then

$$\begin{aligned}\partial_{x^{m-1}}^{m-1} (f(x)x) \circ (h_1; \dots; h_{m-1}) &= \partial_{x^{m-1}}^{m-1} f(x) \circ (h_1; \dots; h_{m-1})x \\ &+ \partial_{x^{m-2}}^{m-2} f(x) \circ (\widehat{h_1}; \dots; h_{m-2}; h_{m-1})h_1 + \dots \\ &+ \partial_{x^{m-2}}^{m-2} f(x) \circ (h_1; \dots; h_{m-2}; \widehat{h_{m-1}})h_{m-1}\end{aligned}$$

Since $\partial_x h_i = 0$, then, using the equality (3.3.12), we get

$$\begin{aligned}
 & \partial_{x^m}^m (f(x)x) \circ (h_1; \dots; h_{m-1}; h_m) \\
 &= \partial_{x^m}^m f(x) \circ (h_1; \dots; h_{m-1}; h_m)x \\
 (4.2.2) \quad &+ \partial_{x^{m-1}}^{m-1} f(x) \circ (h_1; \dots; h_{m-2}; h_{m-1})h_m \\
 &+ \partial_{x^{m-1}}^{m-1} f(x) \circ (\widehat{h_1}; \dots; h_{m-2}; h_{m-1}; h_m)h_1 + \dots \\
 &+ \partial_{x^{m-1}}^{m-1} f(x) \circ (h_1; \dots; h_{m-2}; \widehat{h_{m-1}}; h_m)h_{m-1}
 \end{aligned}$$

The difference between equalities (4.2.1) and (4.2.2) is only in form of presentation. We proved the theorem. \square

THEOREM 4.2.2. *For any $n \geq 0$, the following equality is true*

$$\frac{\partial^{n+1} p_n(x)}{\partial x^{n+1}} = 0$$

PROOF. Since $p_0(x) = a_0$, $a_0 \in D$, then for $n = 0$ theorem is corollary of definition 3.3.1. Let statement of theorem is true for $n - 1$. According to theorem 4.2.1, when $f(x) = p_{n-1}(x)$, we get

$$\begin{aligned}
 \partial_{x^{n+1}}^{n+1} p_n(x)(h_1; \dots; h_{n+1}) &= \partial_{x^{n+1}}^{n+1} (p_{n-1}(x)xa_n)(h_1; \dots; h_{n+1}) \\
 &= \partial_{x^{n+1}}^{n+1} p_{n-1}(x)(h_1; \dots; h_{n+1})xa_n \\
 &+ \partial_{x^n}^n p_{n-1}(x)(\widehat{h_1}; \dots; h_n; h_{n+1})h_1a_n + \dots \\
 &+ \partial_{x^n}^n p_{n-1}(x)(h_1; \dots; h_n; \widehat{h_{n+1}})h_{n+1}a_n
 \end{aligned}$$

According to suggestion of induction all monomials are equal 0. \square

THEOREM 4.2.3. *If $m < n$, then the following equality is true*

$$\left. \frac{\partial^m p_n(x)}{\partial x^m} \right|_{x=0} = 0$$

PROOF. For $n = 1$, the following equality is true

$$\partial^0 p_1(0) = a_0 x a_1 = 0$$

Assume that statement is true for $n - 1$. Then according to theorem 4.2.1

$$\begin{aligned}
 \partial_{x^m}^m (p_{n-1}(x)xa_n)(h_1; \dots; h_m) &= \partial_{x^m}^m p_{n-1}(x)(h_1; \dots; h_m)xa_n \\
 &+ \partial_{x^{m-1}}^{m-1} p_{n-1}(x)(\widehat{h_1}; \dots; h_{m-1}; h_m)h_1a_n + \dots \\
 &+ \partial_{x^{m-1}}^{m-1} p_{n-1}(x)(h_1; \dots; h_{m-1}; \widehat{h_m})h_ma_n
 \end{aligned}$$

First term equal 0 because $x = 0$. Because $m - 1 < n - 1$, then rest terms equal 0 according to suggestion of induction. We proved the statement of theorem. \square

When $h_1 = \dots = h_n = h$, we assume

$$\frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n} \circ h^n = \frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n} \circ (h_1; \dots; h_n)$$

This notation does not create ambiguity, because we can determine function according to number of arguments.

THEOREM 4.2.4. For any $n > 0$, the following equality is true

$$\frac{\partial^n p_n(x)}{\partial x^n} \circ h^n = n! p_n(h)$$

PROOF. For $n = 1$, the following equality is true

$$\frac{\partial p_1(x)}{\partial x} \circ h = \frac{\partial(a_0 x a_1)}{\partial x} \circ h = a_0 h a_1 = 1! p_1(h)$$

Assume the statement is true for $n - 1$. Then according to theorem 4.2.1

$$(4.2.3) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^n p_n(x)}{\partial x^n} \circ h^n &= \left(\frac{\partial^n p_{n-1}(x)}{\partial x^n} \circ h^n \right) x a_n + \left(\frac{\partial^{n-1} p_{n-1}(x)}{\partial x^{n-1}} \circ h^{n-1} \right) h a_n \\ &+ \dots + \left(\frac{\partial^{n-1} p_{n-1}(x)}{\partial x^{n-1}} \circ h^{n-1} \right) h a_n \end{aligned}$$

First term equal 0 according to theorem 4.2.2. The rest n terms equal, and according to suggestion of induction from the equality (4.2.3) it follows

$$\frac{\partial^n p_n(x)}{\partial x^n} \circ h = n \left(\frac{\partial^{n-1} p_{n-1}(x)}{\partial x^{n-1}} \circ h \right) h a_n = n(n-1)! p_{n-1}(h) h a_n = n! p_n(h)$$

Therefore, statement of theorem is true for any n . \square

Let $p(x)$ be polynomial of power n .^{4.1}

$$p(x) = p_0 + p_{1i_1}(x) + \dots + p_{ni_n}(x)$$

We assume sum by index i_k which enumerates terms of power k . According to theorem 4.2.2, 4.2.3, 4.2.4

$$\partial^k p(0) \circ x = k! p_{ki_k}(x)$$

Therefore, we can write

$$p(x) = p_0 + \frac{1}{1!} \partial_x p(0) \circ x + \frac{1}{2!} \partial_{x^2}^2 p(0) \circ x^2 + \dots + \frac{1}{n!} \partial_{x^n}^n p(0) \circ x^n$$

This representation of polynomial is called **Taylor polynomial**. If we consider substitution of variable $x = y - y_0$, then considered above construction remain true for polynomial

$$p(y) = p_0 + p_{1i_1}(y - y_0) + \dots + p_{ni_n}(y - y_0)$$

Therefore

$$\begin{aligned} p(y) &= p_0 + \frac{1}{1!} \partial_y p(y_0) \circ (y - y_0) + \frac{1}{2!} \partial_{y^2}^2 p(y_0) \circ (y - y_0)^2 + \dots \\ &+ \frac{1}{n!} \partial_{y^n}^n p(y_0) \circ (y - y_0)^n \end{aligned}$$

Assume that function $f(x)$ is differentiable at point x_0 up to any order.^{4.2}

^{4.1}I consider Taylor polynomial for polynomials by analogy with construction of Taylor polynomial in [14], p. 246.

^{4.2}I explore construction of Taylor series by analogy with construction of Taylor series in [14], p. 248, 249.

THEOREM 4.2.5. *If function $f(x)$ holds*

$$f(x_0) = \frac{\partial f(x_0)}{\partial x} \circ h = \dots = \frac{\partial^n f(x_0)}{\partial x^n} \circ h^n = 0$$

then for $t \rightarrow 0$ expression $f(x + th)$ is infinitesimal of order higher than n with respect to t

$$f(x_0 + th) = o(t^n)$$

PROOF. When $n = 1$ this statement follows from the equality (3.3.5).

Let statement be true for $n - 1$. Map

$$f_1(x) = \partial_x f(x) \circ h$$

satisfies to condition

$$f_1(x_0) = \frac{\partial f_1(x)}{\partial x} \Big|_{x=x_0} \circ h = \dots = \frac{\partial^{n-1} f_1(x)}{\partial x^{n-1}} \Big|_{x=x_0} \circ h^{n-1} = 0$$

According to suggestion of induction

$$f_1(x_0 + th) = o(t^{n-1})$$

Then the equality (3.3.3) gets form

$$o(t^{n-1}) = \lim_{t \rightarrow 0, t \in R} (t^{-1} f(x + th))$$

Therefore,

$$f(x + th) = o(t^n)$$

□

Let us form polynomial

$$p(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!} \partial_x f(x_0) \circ (x - x_0) + \dots + \frac{1}{n!} \partial_{x^n} f(x_0) \circ (x - x_0)^n$$

According to theorem 4.2.5

$$f(x_0 + t(x - x_0)) - p(x_0 + t(x - x_0)) = o(t^n)$$

Therefore, polynomial $p(x)$ is good approximation of map $f(x)$.

If the map $f(x)$ has the derivative of any order, then passing to the limit $n \rightarrow \infty$, we get expansion into series

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f(x_0)}{\partial x^n} \circ (x - x_0)^n$$

which is called **Taylor series**.

CHAPTER 5

References

- [1] Serge Lang, Algebra, Springer, 2002
- [2] A. G. Kurosh, Higher Algebra,
George Yankovsky translator,
Mir Publishers, 1988, ISBN: 978-5030001319
- [3] Aleks Kleyn, Introduction into Calculus over Division Ring,
eprint [arXiv:0812.4763](#) (2010)
- [4] Aleks Kleyn, Representation of Universal Algebra,
eprint [arXiv:0912.3315](#) (2009)
- [5] Aleks Kleyn, Polynomial over Associative D -Algebra,
eprint [arXiv:1302.7204](#) (2013)
- [6] Aleks Kleyn, Linear Map of D -Algebra,
eprint [arXiv:1502.04063](#) (2015)
- [7] John C. Baez, The Octonions,
eprint [arXiv:math.RA/0105155](#) (2002)
- [8] Paul M. Cohn, Universal Algebra, Springer, 1981
- [9] Paul M. Cohn, Algebra, Volume 1, John Wiley & Sons, 1982
- [10] N. Bourbaki, General Topology, Chapters 5 - 10, Springer, 1989
- [11] N. Bourbaki, Topological Vector Spaces, Chapters 1 - 5, Transl. by H. G.
Eggleston & S. Madan, Springer, 2003
- [12] L. S. Pontryagin, Selected Works, Volume Two, Topological Groups, Gor-
don and Breach Science Publishers, 1986
- [13] Postnikov M. M., Geometry IV: Differential geometry, Moscow, Nauka,
1983
- [14] Fikhtengolts G. M., Differential and Integral Calculus Course, volume 1,
Moscow, Nauka, 1969
- [15] Alekseyevskii D. V., Vinogradov A. M., Lychagin V. V., Basic Concepts
of Differential Geometry
VINITI Summary 28
Moscow. VINITI, 1988
- [16] Richard D. Schafer, An Introduction to Nonassociative Algebras, Dover
Publications, Inc., New York, 1995
- [17] Vadim Komkov, Variational Principles of Continuum Mechanics with En-
gineering Applications: Critical Points Theory,
Springer, 1986
- [18] V. I. Arnautov, S. T. Glavatsky, A. V. Mikhalev,
Introduction to the theory of topological rings and modules, Volume 1995,
Marcel Dekker, Inc, 1996

CHAPTER 6

Index

- A -number 13
- A -representation in Ω -algebra 8
- absolute value 21
- algebra over ring 13
- arity 7
- associative D -algebra 14
- associative law 10
- associator of D -algebra 14
- Banach D -algebra 21
- carrier of Ω -algebra 7
- Cartesian power 7
- Cauchy sequence 20, 21
- center of D -algebra A 14
- commutative D -algebra 13
- commutator of D -algebra 13
- complete ring 20
- component of derivative 23
- component of derivative of Second Order 32
- continuous map 21
- D -algebra 13
- D -module 10
- D -vector space 10
- derivative of map 23
- derivative of order n 32
- derivative of second order 31
- differentiable map 22
- differential of map 23
- distributive law 10
- effective representation of Ω -algebra 8
- endomorphism 8
- free algebra over ring 13
- fundamental sequence 20, 21
- homogeneous polynomial of power k 17
- homomorphism 8
- limit of sequence 19, 21
- linear map 10, 14
- module over ring 10
- monomial of power k 17
- morphism of representation f 9
- morphism of representations from f into g 8
- morphism of representations of Ω_1 -algebra in Ω_2 -algebra 8
- n -ary operation on set 7
- norm of map 21
- norm on D -algebra 21
- norm on ring 19
- normed D -algebra 21
- normed ring 19
- nucleus of D -algebra A 14
- operation on set 7
- operator domain 7
- permutation 10
- polylinear map 11, 15
- polynomial 17
- reduced morphism of representations 9
- representation of Ω_1 -algebra A in Ω_2 -algebra M 8
- standard component of derivative 24
- standard representation of the derivative 24
- structural constants 14
- tensor power 13
- tensor product 12
- topological D -algebra 20
- topological ring 19
- transformation of universal algebra 8
- unit sphere in D -algebra 21
- unitarity law 10
- universal algebra 7
- vector space over field 10
- Ω -algebra 7

CHAPTER 7

Special Symbols and Notations

$A[x]$	A -algebra of polynomials over D -algebra A 17	$N(A)$	nucleus of D -algebra A 14
(a, b, c)	associator of D -algebra 14	$A_1 \otimes \dots \otimes A_n$	tensor product 12
$[a, b]$	commutator of D -algebra 13	$Z(A)$	center of D -algebra A 14
$A_k[x]$	A -module of homogeneous polynomials over D -algebra A 17	Ω	operator domain 7
A_Ω	Ω -algebra 7	$\Omega(n)$	set of n -ary operators 7
$A^{\otimes n}$	tensor power of algebra A 13		
B^A	Cartesian power 7		
C_{ij}^k	structural constants 14		
$\frac{\partial_{s,p} f(x)}{\partial x}$	component of derivative of map $f(x)$ 23		
$\frac{\partial_{s,p}^2 f(x)}{\partial x^2}$	component of derivative of second order of map $f(x)$ 32		
$\frac{\partial f(x)}{\partial x}$	derivative of map f 22		
$\frac{\partial_x f(x)}{\partial x}$	derivative of map f 22		
$\frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n}$	derivative of order n 32		
$\frac{\partial_{x^n} f(x)}{\partial x^n}$	derivative of order n 32		
$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}$	derivative of second order 31		
$\frac{\partial_{x^2}^2 f(x)}{\partial x^2}$	derivative of second order 31		
df	differential of map f 23		
$\frac{\partial^{ij} f(x)}{\partial x}$	standard component of derivative 24		
$\ f\ $	norm of map 21		
$a^{i_1 \dots i_n}$	standard component of tensor 13		
$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$	limit of sequence 19		
$\mathcal{L}(D; A_1; A_2)$	set of linear maps 10, 14		
$\mathcal{L}(D; A_1, \dots, A_n; S)$	set of polylinear maps 15		
$\mathcal{L}(D; A^n; S)$	set of n -linear maps 15		
$\text{End}(\Omega_2; A_2)$	set of transformations of universal algebra M 8		

Введение в математический анализ над банаховой алгебры

Александр Клейн

Aleks_Kleyn@MailAPS.org
<http://AleksKleyn.dyndns-home.com:4080/>
<http://sites.google.com/site/AleksKleyn/>
http://arxiv.org/a/kleyn_a_1
<http://AleksKleyn.blogspot.com/>

Аннотация. Пусть A - банаховая D -алгебра с нормой $|a|$. Отображение

$$f : A \rightarrow A$$

дифференцируемо на множестве $U \subset A$, если в каждой точке $x \in U$ изменение отображения f может быть представлено в виде

$$f(x + dx) - f(x) = \partial_x f(x) \circ dx + o(dx) = \frac{\partial f(x)}{\partial x} \circ dx + o(dx)$$

где

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} : A \rightarrow A$$

линейное отображение D -алгебры A и

$$o : A \rightarrow A$$

такое непрерывное отображение, что

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{|o(a)|}{|a|} = 0$$

Линейное отображение $\frac{\partial f(x)}{\partial x}$ называется производной отображения f .

Предполагая, что определена производная $\partial_{x^{n-1}}^{n-1} f(x)$ порядка $n - 1$, мы определим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n} \circ (a_1; \dots; a_n) &= \partial_{x^n} f(x) \circ (a_1; \dots; a_n) \\ &= \partial_x (\partial_{x^{n-1}}^{n-1} f(x) \circ (a_1; \dots; a_{n-1})) \circ a_n \end{aligned}$$

производную порядка n отображения f . Если отображение $f(x)$ имеет производную любого порядка, то отображение $f(x)$ имеет разложение в ряд Тейлора

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f(x_0)}{\partial x^n} \circ (x - x_0)^n$$

Оглавление

Глава 1. Предисловие	5
Глава 2. Предварительные определения	7
2.1. Универсальная алгебра	7
2.2. Представление универсальной алгебры	8
2.3. Перестановка	10
2.4. Модуль над коммутативным кольцом	10
2.5. Алгебра над коммутативным кольцом	13
2.6. Многочлен над ассоциативной D -алгеброй	17
Глава 3. Дифференцируемые отображения	19
3.1. Топологическое кольцо	19
3.2. Топологическая D -алгебра	21
3.3. Производная отображений D -алгебры	23
Глава 4. Производная второго порядка отображения D -алгебры	33
4.1. Производная второго порядка отображения D -алгебры	33
4.2. Ряд Тейлора	34
Глава 5. Список литературы	39
Глава 6. Предметный указатель	40
Глава 7. Специальные символы и обозначения	42

Предисловие

Дорога очарований и разочарований.

Но я бы сказал наоборот. Когда ты понимаешь, что причина твоих разочарований - в твоих ожиданиях, ты начинаешь присматриваться к окружающему ландшафту. Ты оказался на тропе, по которой до тебя никто не ходил. И новые впечатления куда сильнее, чем если бы ты шёл по дороге многократно протоптанной и хорошо изученной.

Автор неизвестен. Записки путешественника.

В основе математического анализа лежит возможность линейного приближения к отображению, и основные построения математического анализа уходят корнями в линейную алгебру. Так как произведение в поле коммутативно, то линейная алгебра над полем относительно проста. При переходе к алгебре над коммутативным кольцом, некоторые утверждения линейной алгебры сохраняются, но появляются и новые утверждения, которые меняют ландшафт линейной алгебры.

Здесь я хочу обратить внимание на эволюцию, которую претерпело понятие производной со времён Ньютона. Когда мы изучаем функции одной переменной, то производная в заданной точке является числом

$$(1) \quad dx^2 = 2x \, dx$$

Когда мы изучаем функцию нескольких переменных, выясняется, что числа недостаточно. Производная становится вектором или градиентом

$$z = x^2 + y^3$$

$$dz = 2x \, dx + 3y^2 \, dy$$

При изучении отображений векторных пространств мы впервые говорим о производной как об операторе

$$x = u \sin v \quad y = u \cos v \quad z = u$$

$$dx = \sin v \, du + u \cos v \, dv \quad dy = \cos v \, du - u \sin v \, dv \quad dz = 1 \, du + 0 \, dv$$

Но так как этот оператор линеен, то мы можем представить производную как матрицу. И в этом случае мы можем представить вектор приращения отображения как произведение матрицы производной (матрицы Якоби) на вектор

приращения аргумента

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin v & u \cos v \\ \cos v & -u \sin v \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

Чтобы понять структуру производной отображения банаховой алгебры, рассмотрим отображение $y = x^2$ алгебры кватернионов. Если аргумент x имеет приращение dx , то приращение dy функции y имеет вид

$$(2) \quad dy = (x + dx)^2 - x^2 = x^2 + x dx + dx x + (dx)^2 - x^2 = x dx + dx x + (dx)^2$$

Так как dx является бесконечно малой, то мы можем пренебречь значением величины $(dx)^2$ и из равенства (2) следует, что

$$(3) \quad dy = x dx + dx x$$

Если мы предположим, что в выражении (3) можно выделить левый или правый множитель

$$(4) \quad x dx + dx x = a dx$$

подобно равенству (1), то мы видим, что величина a зависит от направления дифференциала dx . Это даёт основание предположить, что производная в алгебре кватернионов является производной по направлению или производной Гато ([17], страница 322). При этом мы рассматриваем дифференциал (3) как аддитивное отображение, т. е. отображение удовлетворяющее равенству $f(a+b)=f(a)+f(b)$

Уже в процессе работы над статьёй [3] я понял, что вместо выражения (4) я должен рассматривать оба левый и правый множители

$$(5) \quad x dx + dx x = a dx b$$

Тем не менее, я продолжал рассматривать выражение (5) как аддитивное отображение дифференциала dx .

В процессе изучения теории представлений универсальной алгебры ([4, 6]) я понял, что выражение (5) является линейным отображением дифференциала dx . Следовательно, выражение (3) является определением производной отображения $y = x^2$. Эта новая концепция является основой данной статьи.

Предварительные определения

2.1. Универсальная алгебра

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1.1. Для любых множеств^{2.1} A, B , декартова степень B^A - это множество отображений

$$f : A \rightarrow B$$

□

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1.2. Пусть дано множество A и целое число $n \geq 0$. Отображение^{2.2}

$$\omega : A^n \rightarrow A$$

называется **n -арной операцией на множестве A** или просто **операцией на множестве A** . Для любых $a_1, \dots, a_n \in A$, мы пользуемся любой из форм записи $\omega(a_1, \dots, a_n)$, $a_1 \dots a_n \omega$ для обозначения образа отображения ω . □

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1.3. Согласно определениям 2.1.1, 2.1.2, n -арная операция $\omega \in A^{A^n}$. □

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1.4. Область операторов - это множество операторов^{2.3} Ω вместе с отображением

$$a : \Omega \rightarrow N$$

Если $\omega \in \Omega$, то $a(\omega)$ называется **арностью** оператора ω . Если $a(\omega) = n$, то оператор ω называется **n -арным**. Мы пользуемся обозначением

$$\Omega(n) = \{\omega \in \Omega : a(\omega) = n\}$$

для множества n -арных операторов. □

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1.5. Пусть A - множество, а Ω - область операторов.^{2.4} Семейство отображений

$$\Omega(n) \rightarrow A^{A^n} \quad n \in N$$

называется **структурой Ω -алгебры на A** . Множество A со структурой Ω -алгебры называется **Ω -алгеброй A_Ω** или **универсальной алгеброй**. Множество A называется **носителем Ω -алгебры**. □

Область операторов Ω описывает множество Ω -алгебр. Элемент множества Ω называется оператором, так как операция предполагает некоторое множество. Согласно замечанию 2.1.3 и определению 2.1.5, каждому оператору $\omega \in \Omega(n)$ сопоставляется n -арная операция ω на A .

^{2.1} Я следую определению из примера (iv), [8], страницы 17, 18.

^{2.2} Определение 2.1.2 опирается на определение в примере (vi), страница [8]-26.

^{2.3} Я следую определению 1, страница [8]-62.

^{2.4} Я следую определению 2, страница [8]-62.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1.6. Пусть A, B - Ω -алгебры и $\omega \in \Omega(n)$. *Отображение*^{2.5}

$$f : A \rightarrow B$$

согласовано с операцией ω , если, для любых $a_1, \dots, a_n \in A$,

$$(2.1.1) \quad f(a_1) \dots f(a_n) \omega = f(a_1 \dots a_n \omega)$$

Отображение f называется **гомоморфизмом** Ω -алгебры A в Ω -алгебру B , если f согласовано с каждым $\omega \in \Omega$. \square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1.7. Гомоморфизм, источником и целью которого является одна и та же алгебра, называется **эндоморфизмом**. \square

2.2. Представление универсальной алгебры

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2.1. Пусть множество A является Ω -алгеброй. Эндоморфизм $t \in \text{End}(\Omega; A)$ называется **преобразованием универсальной алгебры** A . \square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2.2. Пусть множество A_2 является Ω_2 -алгеброй. Пусть на множестве преобразований $\text{End}(\Omega_2; A_2)$ определена структура Ω_1 -алгебры. Гомоморфизм

$$f : A_1 \rightarrow \text{End}(\Omega_2; A_2)$$

Ω_1 -алгебры A_1 в Ω_1 -алгебру $\text{End}(\Omega_2; A_2)$ называется **представлением** Ω_1 -алгебры или **A_1 -представлением** в Ω_2 -алгебре A_2 . \square

Мы будем также пользоваться записью

$$f : A_1 \dashrightarrow A_2$$

для обозначения представления Ω_1 -алгебры A_1 в Ω_2 -алгебре A_2 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2.3. Мы будем называть представление

$$f : A_1 \dashrightarrow A_2$$

Ω_1 -алгебры A_1 **эффективным**,^{2.6} если отображение

$$f : A_1 \rightarrow \text{End}(\Omega_2; A_2)$$

является изоморфизмом Ω_1 -алгебры A_1 в $\text{End}(\Omega_2; A_2)$. \square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2.4. Пусть

$$f : A_1 \dashrightarrow A_2$$

представление Ω_1 -алгебры A_1 в Ω_2 -алгебре A_2 и

$$g : B_1 \dashrightarrow B_2$$

представление Ω_1 -алгебры B_1 в Ω_2 -алгебре B_2 . Для $i = 1, 2$, пусть отображение

$$r_i : A_i \rightarrow B_i$$

является гомоморфизмом Ω_j -алгебры. Матрица отображений $(r_1 \ r_2)$ та-ких, что

$$(2.2.1) \quad r_2 \circ f(a) = g(r_1(a)) \circ r_2$$

^{2.5} Я слеую определению на странице [8]-63.

^{2.6} Аналогичное определение эффективного представления группы смотри в [13], страница 16, [15], страница 111, [9], страница 51 (Кон называет такое представление точным).

называется **морфизмом представлений** из f в g . Мы также будем говорить, что определён морфизм представлений Ω_1 -алгебры в Ω_2 -алгебре. \square

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2.5. Мы можем рассматривать пару отображений r_1, r_2 как отображение

$$F : A_1 \cup A_2 \rightarrow B_1 \cup B_2$$

такое, что

$$F(A_1) = B_1 \quad F(A_2) = B_2$$

Поэтому в дальнейшем матрицу отображений $(r_1 \ r_2)$ мы будем также называть отображением. \square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2.6. Если представления f и g совпадают, то морфизм представлений $(r_1 \ r_2)$ называется **морфизмом представления** f . \square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2.7. Пусть

$$f : A_1 \multimap A_2$$

представление Ω_1 -алгебры A_1 в Ω_2 -алгебре A_2 и

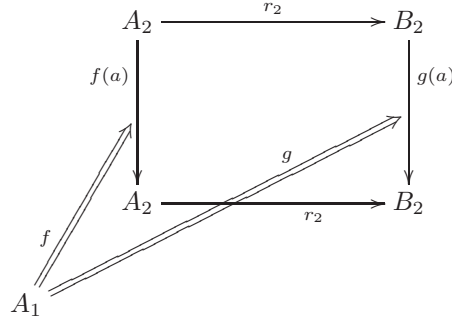
$$g : A_1 \multimap B_2$$

представление Ω_1 -алгебры A_1 в Ω_2 -алгебре B_2 . Пусть

$$(\text{id} : A_1 \rightarrow A_1 \quad r_2 : A_2 \rightarrow B_2)$$

морфизм представлений. В этом случае мы можем отождествить морфизм (id, R) представлений Ω_1 -алгебры и соответствующий гомоморфизм R Ω_2 -алгебры и будем называть гомоморфизм R **приведённым морфизмом представлений**. Мы будем пользоваться диаграммой

(2.2.2)

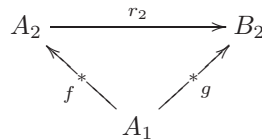


для представления приведённого морфизма R представлений Ω_1 -алгебры. Из диаграммы следует

(2.2.3)

$$r_2 \circ f(a) = g(a) \circ r_2$$

Мы будем также пользоваться диаграммой



вместо диаграммы (2.2.2). \square

2.3. Перестановка

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3.1. *Инъективное отображение конечного множества в себя называется перестановкой.*^{2.7} \square

Обычно перестановку σ мы записываем в виде матрицы

$$(2.3.1) \quad \sigma = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ \sigma(a_1) & \dots & \sigma(a_n) \end{pmatrix}$$

Запись (2.3.1) перестановки эквивалентна утверждению

$$\sigma : a \in A \rightarrow \sigma(a) \in A \quad A = \{a_1, \dots, a_n\}$$

Поэтому порядок столбцов в записи (2.3.1) несущественен.

2.4. Модуль над коммутативным кольцом

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4.1. *Пусть коммутативное кольцо D имеет единицу 1. Эффективное представление*

$$(2.4.1) \quad f : D \longrightarrow V \quad f(d) : v \rightarrow dv$$

кольца D в абелевой группе V называется **модулем над кольцом D** или **D -модулем**. Эффективное представление (2.4.1) поля D в абелевой группе V называется **векторным пространством над полем D** или **D -векторным пространством**. \square

ТЕОРЕМА 2.4.2. *Элементы D -модуля V удовлетворяют соотношениям*

- **закону ассоциативности**

$$(2.4.2) \quad (ab)m = a(bm)$$

- **закону дистрибутивности**

$$(2.4.3) \quad a(m + n) = am + an$$

$$(2.4.4) \quad (a + b)m = am + bm$$

- **закону унитарности**

$$(2.4.5) \quad 1m = m$$

для любых $a, b \in D, m, n \in V$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема является следствием теоремы [6]-4.1.3. \square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4.3. *Пусть A_1, A_2 - D -модули. Приведенный морфизм представлений*

$$f : A_1 \rightarrow A_2$$

D -модуля A_1 в D -модуль A_2 называется **линейным отображением D -модуля A_1 в D -модуль A_2** . Обозначим $\mathcal{L}(D; A_1; A_2)$ множество линейных отображений D -модуля A_1 в D -модуль A_2 . \square

^{2.7} Смотри определение и свойства перестановки в [2], страницы 28 - 32, [9], страницы 58, 59.

ТЕОРЕМА 2.4.4. *Линейное отображение*

$$f : A_1 \rightarrow A_2$$

D -модуля A_1 в D -модуль A_2 удовлетворяет равенствам^{2.8}

$$(2.4.6) \quad f \circ (a + b) = f \circ a + f \circ b$$

$$(2.4.7) \quad f \circ (pa) = p(f \circ a)$$

$$a, b \in A_1 \quad p \in D$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема является следствием теоремы [6]-4.2.2. □

ТЕОРЕМА 2.4.5. *Пусть отображение*

$$f : A_1 \rightarrow A_2$$

является линейным отображением D -модуля A_1 в D -модуль A_2 . Тогда

$$f \circ 0 = 0$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема является следствием теоремы [6]-4.2.5. □

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4.6. *Пусть D - коммутативное кольцо. Пусть A_1, \dots, A_n, S - D -модули. Мы будем называть отображение*

$$f : A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow S$$

полилинейным отображением модулей A_1, \dots, A_n в модуль S , если

$$f \circ (a_1, \dots, a_i + b_i, \dots, a_n) = f \circ (a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) + f \circ (a_1, \dots, b_i, \dots, a_n)$$

$$f \circ (a_1, \dots, pa_i, \dots, a_n) = pf \circ (a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)$$

$$1 \leq i \leq n \quad a_i, b_i \in A_i \quad p \in D$$

□

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4.7. *Пусть A_1, \dots, A_n - свободные модули над коммутативным кольцом D .^{2.9} Рассмотрим категорию \mathcal{A}_1 объектами которой являются полилинейные отображения*

$$f : A_1 \times \dots \times A_n \longrightarrow S_1 \quad g : A_1 \times \dots \times A_n \longrightarrow S_2$$

где S_1, S_2 - модули над кольцом D . Мы определим морфизм

$$f \rightarrow g$$

как линейное отображение

$$h : S_1 \rightarrow S_2$$

^{2.8}В некоторых книгах (например, [1], с. 94) теорема 2.4.4 рассматривается как определение.

^{2.9} Я определяю тензорное произведение D -модулей по аналогии с определением в [1], с. 456 - 458.

такое, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 & & S_1 \\
 & \nearrow f & \downarrow h \\
 A_1 \times \dots \times A_n & & S_2 \\
 & \searrow g &
 \end{array}$$

Универсальный объект $A_1 \otimes \dots \otimes A_n$ категории \mathcal{A}_1 называется **тензорным произведением** модулей A_1, \dots, A_n . \square

ТЕОРЕМА 2.4.8. Пусть D - коммутативное кольцо. Пусть A_1, \dots, A_n - D -модули. Тензорное произведение дистрибутивно относительно сложения

$$\begin{aligned}
 (2.4.8) \quad & a_1 \otimes \dots \otimes (a_i + b_i) \otimes \dots \otimes a_n \\
 &= a_1 \otimes \dots \otimes a_i \otimes \dots \otimes a_n + a_1 \otimes \dots \otimes b_i \otimes \dots \otimes a_n \\
 & a_i, b_i \in A_i
 \end{aligned}$$

Представление кольца D в тензорном произведении определено равенством

$$\begin{aligned}
 (2.4.9) \quad & a_1 \otimes \dots \otimes (ca_i) \otimes \dots \otimes a_n = c(a_1 \otimes \dots \otimes a_i \otimes \dots \otimes a_n) \\
 & a_i \in A_i \quad c \in D
 \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема является следствием теоремы [6]-4.4.3. \square

ТЕОРЕМА 2.4.9. Пусть A_1, \dots, A_n - модули над коммутативным кольцом D . Тензорное произведение

$$f : A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow A_1 \otimes \dots \otimes A_n$$

существует и единственно. Мы пользуемся обозначением

$$f \circ (a_1, \dots, a_n) = a_1 \otimes \dots \otimes a_n$$

для образа отображения f . Пусть

$$g : A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow V$$

полилинейное отображение в D -модуль V . Существует линейное отображение

$$h : A_1 \otimes \dots \otimes A_n \rightarrow V$$

такое, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 & & A_1 \otimes \dots \otimes A_n \\
 & \nearrow f & \downarrow h \\
 A_1 \times \dots \times A_n & & V \\
 & \searrow g &
 \end{array}
 \quad (2.4.10)$$

коммутативна. Отображение h определено равенством

$$(2.4.11) \quad h \circ (a_1 \otimes \dots \otimes a_n) = g \circ (a_1, \dots, a_n)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Смотри доказательство теорем [6]-4.4.2, [6]-4.4.4. \square

СОГЛАШЕНИЕ 2.4.10. Алгебры S_1, S_2 могут быть различными множествами. Однако они неразличимы для нас, если мы рассматриваем их как изоморфные представления. В этом случае мы будем писать $S_1 = S_2$. \square

ТЕОРЕМА 2.4.11.

$$(2.4.12) \quad (A_1 \otimes A_2) \otimes A_3 = A_1 \otimes (A_2 \otimes A_3) = A_1 \otimes A_2 \otimes A_3$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема является следствием теоремы [6]-3.4.5. \square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4.12. Тензорное произведение

$$A^{\otimes n} = A_1 \otimes \dots \otimes A_n \quad A_1 = \dots = A_n = A$$

называется **тензорной степенью модуля** A_1 . \square

ТЕОРЕМА 2.4.13. Отображение

$$(v_1, \dots, v_n) \in V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow v_1 \otimes \dots \otimes v_n \in V_1 \otimes \dots \otimes V_n$$

является полилинейным отображением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема является следствием теоремы [6]-4.4.5. \square

ТЕОРЕМА 2.4.14. Пусть \bar{e}_i - базис модуля A_i над кольцом D . Произвольный тензор $a \in A_1 \otimes \dots \otimes A_n$ можно представить в виде

$$(2.4.13) \quad a = a^{i_1 \dots i_n} e_{1 \cdot i_1} \otimes \dots \otimes e_{n \cdot i_n}$$

Мы будем называть выражение $a^{i_1 \dots i_n}$ **стандартной компонентой тензора**.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема является следствием теоремы [6]-4.4.6. \square

2.5. Алгебра над коммутативным кольцом

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5.1. Пусть D - коммутативное кольцо. D -модуль A_1 называется **алгеброй над кольцом D** или **D -алгеброй**, если определена операция произведения^{2.10} в A_1

$$(2.5.1) \quad v w = C \circ (v, w)$$

где C - билинейное отображение

$$C : A \times A \rightarrow A$$

Если A_1 является свободным D -модулем, то A_1 называется **свободной алгеброй над кольцом D** . \square

ТЕОРЕМА 2.5.2. Произведение в алгебре A_1 дистрибутивно по отношению к сложению.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема является следствием теоремы [6]-5.1.2. \square

СОГЛАШЕНИЕ 2.5.3. Элемент D -алгебры A называется **A -числом**. Например, комплексное число также называется C -числом, а кватернион называется H -числом. \square

^{2.10} Я слеую определению, приведенному в [16], с. 1, [7], с. 4. Утверждение, верное для произвольного D -модуля, верно также для D -алгебры.

Произведение в алгебре может быть ни коммутативным, ни ассоциативным. Следующие определения основаны на определениях, данных в [16], страница 13.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5.4. Коммутатор

$$[a, b] = ab - ba$$

служит мерой коммутативности в D -алгебре A_1 . D -алгебра A_1 называется **коммутативной**, если

$$[a, b] = 0$$

□

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5.5. Ассоциатор

$$(2.5.2) \quad (a, b, c) = (ab)c - a(bc)$$

служит мерой ассоциативности в D -алгебре A_1 . D -алгебра A_1 называется **ассоциативной**, если

$$(a, b, c) = 0$$

□

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5.6. Ядро D -алгебры A_1 - это множество^{2.11}

$$N(A) = \{a \in A : \forall b, c \in A, (a, b, c) = (b, a, c) = (b, c, a) = 0\}$$

□

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5.7. Центр D -алгебры A_1 - это множество^{2.12}

$$Z(A) = \{a \in A : a \in N(A), \forall b \in A, ab = ba\}$$

□

СОГЛАШЕНИЕ 2.5.8. Пусть A - свободная алгебра с конечным или счётным базисом. При разложении элемента алгебры A относительно базиса \bar{e} мы пользуемся одной и той же корневой буквой для обозначения этого элемента и его координат. В выражении a^2 не ясно - это компонента разложения элемента a относительно базиса или это операция возведения в степень. Для облегчения чтения текста мы будем индекс элемента алгебры выделять цветом. Например,

$$a = a^i e_i$$

□

Пусть \bar{e} - базис свободной алгебры A_1 над кольцом D . Если алгебра A_1 имеет единицу, положим e_0 - единица алгебры A_1 .

ТЕОРЕМА 2.5.9. Пусть \bar{e} - базис свободной алгебры A_1 над кольцом D . Пусть

$$a = a^i e_i \quad b = b^i e_i \quad a, b \in A$$

Произведение a, b можно получить согласно правилу

$$(2.5.3) \quad (ab)^k = C_{ij}^k a^i b^j$$

^{2.11} Определение дано на базе аналогичного определения в [16], с. 13

^{2.12} Определение дано на базе аналогичного определения в [16], с. 14

где C_{ij}^k - структурные константы алгебры A_1 над кольцом D . Произведение базисных векторов в алгебре A_1 определено согласно правилу

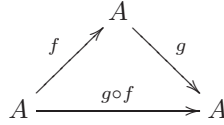
$$(2.5.4) \quad e_i e_j = C_{ij}^k e_k$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема является следствием теоремы [6]-5.1.9. \square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5.10. Пусть A_1 и A_2 - алгебры над кольцом D . Линейное отображение D -модуля A_1 в D -модуль A_2 называется **линейным отображением** D -алгебры A_1 в D -алгебру A_2 . Обозначим $\mathcal{L}(D; A_1; A_2)$ множество линейных отображений D -алгебры A_1 в D -алгебру A_2 . \square

ТЕОРЕМА 2.5.11. Пусть A - алгебра над коммутативным кольцом D . D -модуль $\mathcal{L}(D; A; A)$, оснащённый произведением

$$(2.5.5) \quad \circ : (g, f) \in \mathcal{L}(D; A; A) \times \mathcal{L}(D; A; A) \rightarrow g \circ f \in \mathcal{L}(D; A; A)$$



является алгеброй над D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема является следствием теоремы [6]-6.2.5. \square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5.12. Пусть A_1, \dots, A_n, S - D -алгебры. Мы будем называть полилинейное отображение

$$f : A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow S$$

D -модулей A_1, \dots, A_n в D -модуль S **полилинейным отображением** D -алгебр A_1, \dots, A_n в D -модуль S . Обозначим $\mathcal{L}(D; A_1, \dots, A_n; S)$ множество полилинейных отображений D -алгебр A_1, \dots, A_n в D -алгебру S . Обозначим $\mathcal{L}(D; A^n; S)$ множество n -линейных отображений D -алгебры A_1 ($A_1 = \dots = A_n = A_1$) в D -алгебру S . \square

ТЕОРЕМА 2.5.13. Тензорное произведение $A_1 \otimes \dots \otimes A_n$ D -алгебр A_1, \dots, A_n является D -алгеброй.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема является следствием теоремы [6]-6.1.3. \square

ТЕОРЕМА 2.5.14. Пусть A_1 ассоциативная D -алгебра. Представление

$$(2.5.6) \quad h : A \otimes A \longrightarrow \mathcal{L}(D; A; A) \quad h(p) : f \rightarrow p \circ f$$

D -модуля $A_1 \otimes A_1$ определено равенством

$$(2.5.7) \quad (a \otimes b) \circ f = a f b \quad a, b \in A \quad f \in \mathcal{L}(D; A; A)$$

Представление (2.5.6) порождает произведение \circ в D -модуле $A_1 \otimes A_1$ согласно правилу

$$(p \circ q) \circ a = p \circ (q \circ a)$$

$$(2.5.8) \quad (p_0 \otimes p_1) \circ (q_0 \otimes q_1) = (p_0 q_0) \otimes (q_1 p_1)$$

Представление (2.5.6) алгебры $A_1 \otimes A_1$ в модуле $\mathcal{L}(D; A; A)$ позволяет отождествить тензор $d \in A_1 \otimes A_1$ с линейным отображением $d \circ \delta \in \mathcal{L}(D; A; A)$,

где $\delta \in \mathcal{L}(D; A; A)$ - тождественное отображение. Линейное отображение, порождённое тензором $a \otimes b \in A_1 \otimes A_1$, имеет вид

$$(2.5.9) \quad (a \otimes b) \circ c = acb$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема является следствием теоремы [6]-6.3.4. \square

СОГЛАШЕНИЕ 2.5.15. В выражении вида

$$a_{i,0} \mathcal{X} a_{i,1}$$

предполагается сумма по индексу i . \square

ТЕОРЕМА 2.5.16. Рассмотрим D -алгебру A_1 и ассоциативную D -алгебру A_2 . Рассмотрим представление алгебры $A_2 \otimes A_2$ в модуле $\mathcal{L}(D; A_1; A_2)$. Отображение

$$h : A_1 \rightarrow A_2$$

порождённое отображением

$$f : A_1 \rightarrow A_2$$

имеет вид

$$(2.5.10) \quad h = (a_{s,0} \otimes a_{s,1}) \circ f = a_{s,0} f a_{s,1}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема является следствием теоремы [6]-6.3.6. \square

ТЕОРЕМА 2.5.17. Пусть A_1 - алгебра над кольцом D . Пусть A_2 - свободная конечно мерная ассоциативная алгебра над кольцом D . Пусть \bar{e} - базис алгебры A_2 над кольцом D . Отображение

$$(2.5.11) \quad g = a \circ f$$

порождённое отображением $f \in \mathcal{L}(D; A_1; A_2)$ посредством тензора $a \in A_2 \otimes A_2$, имеет стандартное представление

$$(2.5.12) \quad g = a^{ij} (e_i \otimes e_j) \circ f = a^{ij} e_i f e_j$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема является следствием теоремы [6]-6.4.1. \square

ТЕОРЕМА 2.5.18. Пусть \bar{e}_1 - базис свободной конечно мерной D -алгебры A_1 . Пусть \bar{e}_2 - базис свободной конечно мерной ассоциативной D -алгебры A_2 . Пусть $C_{2,kl}^p$ - структурные константы алгебры A_2 . Координаты g_l^k отображения

$$g = a \circ f$$

порождённого отображением $f \in \mathcal{L}(D; A_1; A_2)$ посредством тензора $a \in A_2 \otimes A_2$, и его стандартные компоненты g^{ij} связаны равенством

$$(2.5.13) \quad g_l^k = f_l^m g^{ij} C_{im}^p C_{pj}^k$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема является следствием теоремы [6]-6.4.2. \square

ТЕОРЕМА 2.5.19. Пусть A - ассоциативная D -алгебра. Полилинейное отображение

$$(2.5.14) \quad f : A^n \rightarrow A, a = f \circ (a_1, \dots, a_n)$$

порождённое отображениями $I_{s,1}, \dots, I_{s,n} \in \mathcal{L}(D; A; A)$, имеет вид

$$(2.5.15) \quad a = f_{s,0}^n \sigma_s(I_{s,1} \circ a_1) f_{s,1}^n \dots \sigma_s(I_{s,n} \circ a_n) f_{s,n}^n$$

где σ_s - перестановка множества переменных $\{a_1, \dots, a_n\}$

$$\sigma_s = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ \sigma_s(a_1) & \dots & \sigma_s(a_n) \end{pmatrix}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема является следствием теоремы [6]-6.6.6. \square

СОГЛАШЕНИЕ 2.5.20. Если тензор $a \in A^{\otimes(n+1)}$ имеет разложение

$$a = a_{i \cdot 0} \otimes a_{i \cdot 1} \otimes \dots \otimes a_{i \cdot n} \quad i \in I$$

то множество перестановок $\sigma = \{\sigma_i \in S(n) : i \in I\}$ и тензор a порождают отображение

$$(a, \sigma) : A^{\times n} \rightarrow A$$

определённое равенством

$$\begin{aligned} (a, \sigma) \circ (b_1, \dots, b_n) &= (a_{i \cdot 0} \otimes a_{i \cdot 1} \otimes \dots \otimes a_{i \cdot n}, \sigma_i) \circ (b_1, \dots, b_n) \\ &= a_{i \cdot 0} \sigma_i(b_1) a_{i \cdot 1} \dots \sigma_i(b_n) a_{i \cdot n} \end{aligned}$$

\square

2.6. Многочлен над ассоциативной D -алгеброй

Пусть D - коммутативное кольцо и A - ассоциативная D -алгебра с единицей.

ТЕОРЕМА 2.6.1. Пусть $p_k(x)$ - **одночлен степени k над D -алгеброй A** . Тогда

2.6.1.1: *Одночлен степени 0 имеет вид $p_0(x) = a_0$, $a_0 \in A$.*

2.6.1.2: *Если $k > 0$, то*

$$p_k(x) = p_{k-1}(x) x a_k$$

где $a_k \in A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема является следствием теоремы [5]-4.1. \square

В частности, одночлен степени 1 имеет вид $p_1(x) = a_0 x a_1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.6.2. Обозначим $A_k[x]$ абелеву группу, порождённую множеством одночленов степени k . Элемент $p_k(x)$ абелевой группы $A_k[x]$ называется **однородным многочленом степени k** . \square

СОГЛАШЕНИЕ 2.6.3. Пусть тензор $a \in A^{\otimes(n+1)}$. Если $x_1 = \dots = x_n = x$, то мы положим

$$a \circ x^n = a \circ (x_1 \otimes \dots \otimes x_n)$$

\square

ТЕОРЕМА 2.6.4. Однородный многочлен $p(x)$ может быть записан в виде

$$p(x) = a_k \circ x^k \quad a_k \in A^{\otimes(k+1)}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема является следствием теоремы [5]-4.6. \square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.6.5. *Обозначим*

$$A[x] = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n[x]$$

прямую сумму^{2.13} A -модулей $A_n[x]$. Элемент $p(x)$ A -модуля $A[x]$ называется **многочленом** над D -алгеброй A . \square

^{2.13}Смотри определение прямой суммы модулей в [1], страница 98. Согласно теореме 1 на той же странице, прямая сумма модулей существует.

Дифференцируемые отображения

3.1. Топологическое кольцо

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1.1. Кольцо D называется **топологическим кольцом**^{3.1}, если D является топологическим пространством, и алгебраические операции, определённые в D , непрерывны в топологическом пространстве D . \square

Согласно определению, для произвольных элементов $a, b \in D$ и для произвольных окрестностей W_{a-b} элемента $a - b$, W_{ab} элемента ab существуют такие окрестности W_a элемента a и W_b элемента b , что $W_a - W_b \subset W_{a-b}$, $W_a W_b \subset W_{ab}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1.2. **Норма на кольце D** - это отображение^{3.2}

$$d \in D \rightarrow |d| \in R$$

такое, что

- $|a| \geq 0$
- $|a| = 0$ равносильно $a = 0$
- $|ab| = |a| |b|$
- $|a + b| \leq |a| + |b|$

Кольцо D , наделённое структурой, определяемой заданием на D нормы, называется **нормированным кольцом**. \square

Инвариантное расстояние на аддитивной группе кольца D

$$d(a, b) = |a - b|$$

определяет топологию метрического пространства, согласующуюся со структурой кольца в D .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1.3. Пусть D - нормированное кольцо. Элемент $a \in D$ называется **пределом последовательности** $\{a_n\}$

$$a =$$

если для любого $\epsilon \in R$, $\epsilon > 0$, существует, зависящее от ϵ , натуральное число n_0 такое, что

$$|a_n - a| < \epsilon$$

для любого $n > n_0$. \square

ТЕОРЕМА 3.1.4. Пусть D - нормированное кольцо характеристики 0 и пусть $d \in D$. Пусть $a \in D$ - предел последовательности $\{a_n\}$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n d) = ad$$

^{3.1} Определение дано согласно определению из [12], глава 4

^{3.2} Определение дано согласно определению из [10], гл. IX, §3, п°2, а также согласно определению [18]-1.1.12, с. 23.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (da_n) = da$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение теоремы тривиально, однако я привожу доказательство для полноты текста. Поскольку $a \in D$ - предел последовательности $\{a_n\}$, то согласно определению 3.1.3 для заданного $\epsilon \in R$, $\epsilon > 0$, существует натуральное число n_0 такое, что

$$|a_n - a| < \frac{\epsilon}{|d|}$$

для любого $n > n_0$. Согласно определению 3.1.2 утверждение теоремы следует из неравенств

$$|a_n d - ad| = |(a_n - a)d| = |a_n - a||d| < \frac{\epsilon}{|d|}|d| = \epsilon$$

$$|da_n - da| = |d(a_n - a)| = |d||a_n - a| < |d|\frac{\epsilon}{|d|} = \epsilon$$

для любого $n > n_0$. \square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1.5. Пусть D - нормированное кольцо. Последовательность $\{a_n\}$, $a_n \in D$ называется **фундаментальной** или **последовательностью Коши**, если для любого $\epsilon \in R$, $\epsilon > 0$ существует, зависящее от ϵ , натуральное число n_0 такое, что $|a_p - a_q| < \epsilon$ для любых $p, q > n_0$. \square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1.6. Нормированное кольцо D называется **полным** если любая фундаментальная последовательность элементов данного кольца сходится, т. е. имеет предел в этом кольце. \square

В дальнейшем, говоря о нормированном кольце характеристики 0, мы будем предполагать, что определён гомеоморфизм поля рациональных чисел Q в кольцо D .

ТЕОРЕМА 3.1.7. Полное кольцо D характеристики 0 содержит в качестве подполя изоморфный образ поля R действительных чисел. Это поле обычно отождествляют с R .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим фундаментальную последовательность рациональных чисел $\{p_n\}$. Пусть p' - предел этой последовательности в кольце D . Пусть p - предел этой последовательности в поле R . Так как вложение поля Q в тело D гомеоморфно, то мы можем отождествить $p' \in D$ и $p \in R$. \square

ТЕОРЕМА 3.1.8. Пусть D - полное кольцо характеристики 0 и пусть $d \in D$. Тогда любое действительное число $p \in R$ коммутирует с d .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы можем представить действительное число $p \in R$ в виде фундаментальной последовательности рациональных чисел $\{p_n\}$. Утверждение теоремы следует из цепочки равенств

$$pd = \lim_{n \rightarrow \infty} (p_n d) = \lim_{n \rightarrow \infty} (dp_n) = dp$$

основанной на утверждении теоремы 3.1.4. \square

3.2. Топологическая D -алгебра

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2.1. Пусть D - топологическое коммутативное кольцо. D -алгебра A называется **топологической D -алгеброй**^{3.3}, если A наделено топологией, согласующейся со структурой аддитивной группы в A , и отображения

$$(a, v) \in D \times A \rightarrow av \in A$$

$$(v, w) \in A \times A \rightarrow vw \in A$$

непрерывны. \square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2.2. **Норма на D -алгебре A над нормированным коммутативным кольцом D** ^{3.4} - это отображение

$$a \in A \rightarrow |a| \in R$$

такое, что

- $|a| \geq 0$
- $|a| = 0$ равносильно $a = 0$
- $|a + b| \leq |a| + |b|$
- $|ab| \leq |a| |b|$
- $|da| = |d| |a|$, $d \in D$, $a \in A$

D -алгебра A над нормированным коммутативным кольцом D , наделённая структурой, определяемой заданием на A нормы, называется **нормированной D -алгеброй**. \square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2.3. Пусть A - нормированная D -алгебра. Элемент $a \in A$ называется **пределом последовательности** $\{a_n\}$

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

если для любого $\epsilon \in R$, $\epsilon > 0$, существует, зависящее от ϵ , натуральное число n_0 такое, что $|a_n - a| < \epsilon$ для любого $n > n_0$. \square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2.4. Пусть A - нормированная D -алгебра. Последовательность $\{a_n\}$, $a_n \in A$, называется **фундаментальной** или **последовательностью Коши**, если для любого $\epsilon \in R$, $\epsilon > 0$, существует, зависящее от ϵ , натуральное число n_0 такое, что $|a_p - a_q| < \epsilon$ для любых $p, q > n_0$. \square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2.5. Нормированная D -алгебра A называется **банаховой D -алгеброй** если любая фундаментальная последовательность элементов алгебры A сходится, т. е. имеет предел в алгебре A . \square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2.6. Пусть A - банаховая D -алгебра. Множество элементов $a \in A$, $|a| = 1$, называется **единичной сферой** в алгебре A . \square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2.7. Отображение

$$f : A_1 \rightarrow A_2$$

^{3.3} Определение дано согласно определению из [11], с. 21

^{3.4} Определение дано согласно определению из [10], гл. IX, §3, п°3. Если D -алгебра A является алгеброй с делением, то норма называется **абсолютной величиной**. Смотри определение из [10], гл. IX, §3, п°2.

Мы также пользуемся записью $\|a\|$ для нормы A -числа a .

банаховой D_1 -алгебры A_1 с нормой $|x|_1$ в банаховую D_2 -алгебру A_2 с нормой $|y|_2$ называется **непрерывным**, если для любого сколь угодно малого $\epsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что

$$|x' - x|_1 < \delta$$

влечёт

$$|f(x') - f(x)|_2 < \epsilon$$

□

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2.8. Пусть

$$f : A_1 \rightarrow A_2$$

отображение банаховой D_1 -алгебры A_1 с нормой $|x|_1$ в банаховую D_2 -алгебру A_2 с нормой $|y|_2$. Величина

$$(3.2.1) \quad \|f\| = \sup \frac{|f(x)|_2}{|x|_1}$$

называется **нормой отображения** f .

□

ТЕОРЕМА 3.2.9. Пусть

$$f : A_1 \rightarrow A_2$$

линейное отображение банаховой D_1 -алгебры A_1 с нормой $|x|_1$ в банаховую D_2 -алгебру A_2 с нормой $|y|_2$. Тогда

$$(3.2.2) \quad \|f\| = \sup\{|f(x)|_2 : |x|_1 = 1\}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определений 2.4.3, 2.5.10, 3.3.1 и теорем 3.1.7, 3.1.8 следует

$$(3.2.3) \quad f(rx) = rf(x) \quad r \in R$$

Из равенства (3.2.3) и определения 3.2.2 следует

$$\frac{|f(rx)|_2}{|rx|_1} = \frac{|r| |f(x)|_2}{|r| |x|_1} = \frac{|f(x)|_2}{|x|_1}$$

Полагая $r = \frac{1}{|x|_1}$, мы получим

$$(3.2.4) \quad \frac{|f(x)|_2}{|x|_1} = \left| f\left(\frac{x}{|x|_1}\right) \right|_2$$

Равенство (3.2.2) следует из равенств (3.2.4) и (3.2.1).

□

ТЕОРЕМА 3.2.10. Пусть

$$f : A_1 \rightarrow A_2$$

линейное отображение банаховой D_1 -алгебры A_1 с нормой $|x|_1$ в банаховую D_2 -алгебру A_2 с нормой $|y|_2$. Отображение f непрерывно, если $\|f\| < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку отображение f линейно, то согласно определению 3.2.8

$$|f(x) - f(y)|_2 = |f(x - y)|_2 \leq \|f\| |x - y|_1$$

Возьмём произвольное $\epsilon > 0$. Положим $\delta = \frac{\epsilon}{\|f\|}$. Тогда из неравенства

$$|x - y|_1 < \delta$$

следует

$$|f(x) - f(y)|_2 \leq \|f\| \delta = \epsilon$$

Согласно определению 3.2.7 отображение f непрерывно. \square

3.3. Производная отображений D -алгебры

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3.1. Пусть A - банаховая D -алгебра. Отображение

$$f : A \rightarrow A$$

называется **дифференцируемым** на множестве $U \subset A$, если в каждой точке $x \in U$ изменение отображения f может быть представлено в виде

$$(3.3.1) \quad f(x + dx) - f(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x} \circ dx + o(dx)$$

где

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} : A \rightarrow A$$

линейное отображение D -алгебры A и

$$o : A \rightarrow A$$

такое непрерывное отображение, что

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{|o(a)|}{|a|} = 0$$

Линейное отображение $\frac{\partial f(x)}{\partial x}$ называется **производной отображения** f . \square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3.2. Если, для данного x , приращение (3.3.1) отображения

$$f : A \rightarrow A$$

рассматривать как функцию дифференциала dx переменной x , то линейная часть этой функции

$$df = \partial_x f(x) \circ dx = \frac{\partial f(x)}{\partial x} \circ dx$$

называется **дифференциалом отображения** f . \square

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3.3. Согласно определению 3.3.1, при заданном x , производная

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} \in \mathcal{L}(D; A; A)$$

Следовательно, производная отображения f является отображением

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} : A \rightarrow \mathcal{L}(D; A; A)$$

Выражения $\partial_x f(x)$ и $\frac{\partial f(x)}{\partial x}$ являются разными обозначениями одного и того же отображения. \square

СОГЛАШЕНИЕ 3.3.4. Поле комплексных чисел - это алгебра над полем действительных чисел. В теории функций комплексного переменного рассматриваются только линейные отображения, порождённые отображением $I_0 \circ x = x$. Поэтому при изучении производных мы также ограничимся линейными отображениями, порождёнными отображением I_0 . Переход к общему случаю не составляет особого труда. \square

ТЕОРЕМА 3.3.5. Мы можем представить производную отображения f в виде

$$(3.3.2) \quad \begin{aligned} df &= \frac{\partial f(x)}{\partial x} \circ dx = \left(\frac{\partial_{s,0} f(x)}{\partial x} \otimes \frac{\partial_{s,1} f(x)}{\partial x} \right) \circ dx \\ &= \frac{\partial_{s,0} f(x)}{\partial x} dx \frac{\partial_{s,1} f(x)}{\partial x} \end{aligned}$$

Выражение $\frac{\partial_{s,p} f(x)}{\partial x}$, $p = 0, 1$, называется **компонентой производной** отображения $f(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следствие определения 3.3.1, соглашения 3.3.4 и теоремы 2.5.16. \square

ТЕОРЕМА 3.3.6. Определения производной (3.3.1) эквивалентно определению

$$(3.3.3) \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x} \circ a = \lim_{t \rightarrow 0, t \in R} (t^{-1}(f(x+ta) - f(x)))$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определений 2.4.3, 2.5.10, 3.3.1 и теоремы 3.1.7 следует

$$(3.3.4) \quad \begin{aligned} \frac{\partial f(x)}{\partial x} \circ (ta) &= t \frac{\partial f(x)}{\partial x} \circ a \\ t \in R \quad t \neq 0 \quad a \in A \quad a \neq 0 \end{aligned}$$

Комбинируя равенство (3.3.4) и определение 3.3.1, мы получим определение (3.3.3) производной. \square

СЛЕДСТВИЕ 3.3.7. Отображение f дифференцируемо на множестве $U \subset D$, если в каждой точке $x \in U$ приращение отображения f может быть представлен в виде

$$(3.3.5) \quad f(x+ta) - f(x) = t \frac{\partial f(x)}{\partial x} \circ a + o(t)$$

где $o : R \rightarrow A$ - такое непрерывное отображение, что

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{|o(t)|}{|t|} = 0$$

\square

ТЕОРЕМА 3.3.8. Пусть A - банаховая D -алгебра. Пусть \bar{e} - базис алгебры A над кольцом D . Стандартное представление производной отображения

$$f : A \rightarrow A$$

имеет вид

$$(3.3.6) \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{\partial^{ij} f(x)}{\partial x} e_i \otimes e_j$$

Выражение $\frac{\partial^{ij} f(x)}{\partial x}$ в равенстве (3.3.6) называется **стандартной компонентой производной** отображения f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение теоремы является следствием соглашения 3.3.4 и теоремы 2.5.16. \square

ТЕОРЕМА 3.3.9. Пусть A - банаховая D -алгебра. Пусть \bar{e} - базис алгебры A над кольцом D . Тогда производную отображения

$$f : A \rightarrow A$$

можно записать в виде

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} \circ dx = dx^i \frac{\partial f^j}{\partial x^i} e_j$$

где $dx \in A$ имеет разложение

$$dx = dx^i e_i \quad dx^i \in D$$

относительно базиса \bar{e} и матрица Якоби отображения f имеет вид

$$(3.3.7) \quad \frac{\partial f^j}{\partial x^i} = \frac{\partial^{kr} f(x)}{\partial x} C_{ki}^p C_{pr}^j$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение теоремы является следствием теоремы 2.5.18. \square

ТЕОРЕМА 3.3.10. Пусть A - банаховая D -алгебра. Пусть f, g - дифференцируемые отображения

$$f : A \rightarrow A \quad g : A \rightarrow A$$

Отображение

$$f + g : A \rightarrow A$$

дифференцируемо и производная удовлетворяет соотношению

$$(3.3.8) \quad \partial_x(f + g)(x) = \partial_x f(x) + \partial_x g(x)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно определению (3.3.3),

$$\begin{aligned} \partial_x(f + g)(x) \circ a &= \lim_{t \rightarrow 0, t \in R} (t^{-1}((f + g)(x + ta) - (f + g)(x))) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0, t \in R} (t^{-1}(f(x + ta) + g(x + ta) - f(x) - g(x))) \\ (3.3.9) \quad &= \lim_{t \rightarrow 0, t \in R} (t^{-1}(f(x + ta) - f(x))) \\ &+ \lim_{t \rightarrow 0, t \in R} (t^{-1}(g(x + ta) - g(x))) \\ &= \partial_x f(x) \circ a + \partial_x g(x) \circ a \end{aligned}$$

Равенство (3.3.8) следует из равенства (3.3.9). \square

ТЕОРЕМА 3.3.11. Пусть A - банаховая D -алгебра. Пусть

$$h : A \times A \rightarrow A$$

непрерывное билинейное отображение. Пусть f, g - дифференцируемые отображения

$$f : A \rightarrow A \quad g : A \rightarrow A$$

Отображение

$$h(f, g) : A \rightarrow A$$

дифференцируемо и дифференциал удовлетворяет соотношению

$$(3.3.10) \quad \partial_x h(f(x), g(x)) \circ dx = h(\partial_x f(x) \circ dx, g(x)) + h(f(x), \partial_x g(x) \circ dx)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство (3.3.10) следует из цепочки равенств

$$\begin{aligned} \partial_x h(f(x), g(x)) \circ a &= \lim_{t \rightarrow 0} (t^{-1} (h(f(x+ta), g(x+ta)) - h(f(x), g(x)))) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} (t^{-1} (h(f(x+ta), g(x+ta)) - h(f(x), g(x+ta)))) \\ &\quad + \lim_{t \rightarrow 0} (t^{-1} (h(f(x), g(x+ta)) - h(f(x), g(x)))) \\ &= h(\lim_{t \rightarrow 0} t^{-1} (f(x+ta) - f(x)), g(x)) \\ &\quad + h(f(x), \lim_{t \rightarrow 0} t^{-1} (g(x+ta) - g(x))) \end{aligned}$$

основанной на определении (3.3.3). \square

СОГЛАШЕНИЕ 3.3.12. Для заданного билинейного отображения

$$h : A \times A \rightarrow A$$

мы рассмотрим отображения

$$h_1 : \mathcal{L}(D; A; A) \times A \rightarrow \mathcal{L}(D; A; A)$$

$$h_2 : A \times \mathcal{L}(D; A; A) \rightarrow \mathcal{L}(D; A; A)$$

определённые равенствами

$$h_1(f, v) \circ u = h(f \circ u, v)$$

$$h_2(u, f) \circ v = h(u, f \circ v)$$

Мы будем пользоваться буквой h для обозначения отображений h_1, h_2 . \square

ТЕОРЕМА 3.3.13. Пусть A - банаховая D -алгебра. Пусть

$$h : A \times A \rightarrow A$$

непрерывное билинейное отображение. Пусть f, g - дифференцируемые отображения

$$f : A \rightarrow A \quad g : A \rightarrow A$$

Отображение

$$h(f, g) : A \rightarrow A$$

дифференцируемо и производная удовлетворяет соотношению

$$(3.3.11) \quad \partial_x h(f(x), g(x)) = h(\partial_x f(x), g(x)) + h(f(x), \partial_x g(x))$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство (3.3.11) следует из равенства (3.3.10) и соглашения 3.3.12. \square

ТЕОРЕМА 3.3.14. Пусть A - банаховая D -алгебра. Пусть f, g - дифференцируемые отображения

$$f : A \rightarrow A \quad g : A \rightarrow A$$

Производная удовлетворяет соотношению

$$(3.3.12) \quad \frac{\partial f(x)g(x)}{\partial x} \circ dx = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x} \circ dx \right) g(x) + f(x) \left(\frac{\partial g(x)}{\partial x} \circ dx \right)$$

$$\frac{\partial f(x)g(x)}{\partial x} = \frac{\partial f(x)}{\partial x} g(x) + f(x) \frac{\partial g(x)}{\partial x}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема является следствием теорем 3.3.11, 3.3.13 и определения 2.5.1. \square

ТЕОРЕМА 3.3.15. Пусть A - банаховая D -алгебра. Допустим производная отображения

$$f : A \rightarrow A$$

имеет разложение

$$(3.3.13) \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{\partial_{s,0}f(x)}{\partial x} \otimes \frac{\partial_{s,1}f(x)}{\partial x}$$

Допустим производная отображения $g : D \rightarrow D$ имеет разложение

$$(3.3.14) \quad \frac{\partial g(x)}{\partial x} = \frac{\partial_{t,0}g(x)}{\partial x} \otimes \frac{\partial_{t,1}g(x)}{\partial x}$$

Производная отображения $f(x)g(x)$ имеет вид

$$(3.3.15) \quad \frac{\partial f(x)g(x)}{\partial x} = \frac{\partial_{s,0}f(x)}{\partial x} \otimes \left(\frac{\partial_{s,1}f(x)}{\partial x} g(x) \right) + \left(f(x) \frac{\partial_{t,0}g(x)}{\partial x} \right) \otimes \frac{\partial_{t,1}g(x)}{\partial x}$$

$$(3.3.16) \quad \frac{\partial_{s,0}f(x)g(x)}{\partial x} = \frac{\partial_{s,0}f(x)}{\partial x} \quad \frac{\partial_{t,0}f(x)g(x)}{\partial x} = f(x) \frac{\partial_{t,0}g(x)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial_{s,1}f(x)g(x)}{\partial x} = \frac{\partial_{s,1}f(x)}{\partial x} g(x) \quad \frac{\partial_{t,1}f(x)g(x)}{\partial x} = \frac{\partial_{t,1}g(x)}{\partial x}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставим (3.3.13) и (3.3.14) в равенство (3.3.12)

$$(3.3.17) \quad \frac{\partial f(x)g(x)}{\partial x} \circ a = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x} \circ a \right) g(x) + f(x) \left(\frac{\partial g(x)}{\partial x} \circ a \right)$$

$$= \frac{\partial_{s,0}f(x)}{\partial x} a \frac{\partial_{s,1}f(x)}{\partial x} g(x) + f(x) \frac{\partial_{t,0}g(x)}{\partial x} a \frac{\partial_{t,1}g(x)}{\partial x}$$

Опираясь на (3.3.17), мы определяем равенства (3.3.16). \square

ТЕОРЕМА 3.3.16. Пусть A - банаховая D -алгебра. Пусть f, g - дифференцируемые отображения

$$f : A \rightarrow A \quad g : A \rightarrow A$$

Производная удовлетворяет соотношению

$$\frac{\partial f(x) \otimes g(x)}{\partial x} \circ dx = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x} \circ dx \right) \otimes g(x) + f(x) \otimes \left(\frac{\partial g(x)}{\partial x} \circ dx \right)$$

$$\frac{\partial f(x) \otimes g(x)}{\partial x} = \frac{\partial f(x)}{\partial x} \otimes g(x) + f(x) \otimes \frac{\partial g(x)}{\partial x}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема является следствием теорем 3.3.11, 3.3.13, 2.4.13 и определения 2.5.1. \square

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3.17. Пусть

$$(3.3.18) \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{\partial_{s,0}f(x)}{\partial x} \otimes \frac{\partial_{s,1}f(x)}{\partial x}$$

$$(3.3.19) \quad \frac{\partial g(x)}{\partial x} = \frac{\partial_{t,0}g(x)}{\partial x} \otimes \frac{\partial_{t,1}g(x)}{\partial x}$$

Тогда

$$(3.3.20) \quad \frac{\partial f(x) \otimes g(x)}{\partial x} = \frac{\partial_{s,0}f(x)}{\partial x} \otimes \frac{\partial_{s,1}f(x)}{\partial x} \otimes g(x) + f(x) \otimes \frac{\partial_{t,0}g(x)}{\partial x} \otimes \frac{\partial_{t,1}g(x)}{\partial x}$$

Мы не пишем скобки, так как тензорное произведение ассоциативно и дистрибутивно относительно сложения (теоремы 2.4.8, 2.4.11). \square

ТЕОРЕМА 3.3.18. Пусть A - банаховая D -алгебра. Если производная $\partial_x f(x)$ существует в точке x и имеет конечную норму, то отображение f непрерывно в точке x .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения 3.2.8 следует

$$(3.3.21) \quad |\partial_x f(x) \circ a| \leq \|\partial_x f(x)\| |a|$$

Из (3.3.1), (3.3.21) следует

$$(3.3.22) \quad |f(x+a) - f(x)| < |a| \|\partial_x f(x)\|$$

Возьмём произвольное $\epsilon > 0$. Положим

$$\delta = \frac{\epsilon}{\|\partial f(x)\|}$$

Тогда из неравенства

$$|a| < \delta$$

следует

$$|f(x+a) - f(x)| \leq \|\partial_x f(x)\| \delta = \epsilon$$

Согласно определению 3.2.7 отображение f непрерывно в точке x . \square

ТЕОРЕМА 3.3.19. Пусть A - банаховая D -алгебра. Пусть отображение

$$f : A \rightarrow A$$

дифференцируемо в точке x . Тогда

$$\partial_x f(x) \circ 0 = 0$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следствие определения 3.3.1 и теоремы 2.4.5. \square

ТЕОРЕМА 3.3.20. Пусть A - банаховая D -алгебра. Пусть отображение

$$f : A \rightarrow A$$

дифференцируемо в точке x и норма производной отображения f конечна

$$(3.3.23) \quad \|\partial_x f(x)\| = F \leq \infty$$

Пусть отображение

$$g : A \rightarrow A$$

дифференцируемо в точке

$$(3.3.24) \quad y = f(x)$$

и норма производной отображения g конечна

$$(3.3.25) \quad \|\partial_y g(y)\| = G \leq \infty$$

Отображение^{3.5}

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

дифференцируемо в точке x

$$(3.3.26) \quad \begin{cases} \partial_x(g \circ f)(x) = \partial_{f(x)}g(f(x)) \circ \partial_x f(x) \\ \partial_x(g \circ f)(x) \circ a = \partial_{f(x)}g(f(x)) \circ \partial_x f(x) \circ a \end{cases}$$

$$(3.3.27) \quad \begin{cases} \frac{\partial_{st.0}(g \circ f)(x)}{\partial x} = \frac{\partial_{s.0}g(f(x))}{\partial f(x)} \frac{\partial_{t.0}f(x)}{\partial x} \\ \frac{\partial_{st.1}(g \circ f)(x)}{\partial x} = \frac{\partial_{t.1}f(x)}{\partial x} \frac{\partial_{s.1}g(f(x))}{\partial f(x)} \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно определению 3.3.1

$$(3.3.28) \quad g(y+b) - g(y) = \partial_y g(y) \circ b + o_1(b)$$

где $o_1 : A \rightarrow A$ - такое непрерывное отображение, что

$$\lim_{b \rightarrow 0} \frac{|o_1(b)|}{|b|} = 0$$

Согласно определению 3.3.1

$$(3.3.29) \quad f(x+a) - f(x) = \partial_x f(x) \circ a + o_2(a)$$

где $o_2 : A \rightarrow A$ - такое непрерывное отображение, что

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{|o_2(a)|}{|a|} = 0$$

Согласно (3.3.29) смещение a значения $x \in A$ приводит к смещению

$$(3.3.30) \quad b = \partial_x f(x) \circ a + o_2(a)$$

значения y . Используя (3.3.24), (3.3.30) в равенстве (3.3.28), мы получим

$$(3.3.31) \quad \begin{aligned} & g(f(x+a)) - g(f(x)) \\ &= g(f(x) + \partial_x f(x) \circ a + o_2(a)) - g(f(x)) \\ &= \partial_{f(x)}g(f(x)) \circ (\partial_x f(x) \circ a + o_2(a)) - o_1(\partial_x f(x) \circ a + o_2(a)) \end{aligned}$$

Согласно определениям 3.3.1, 2.4.3, 2.5.10, 3.3.1, из равенства (3.3.31) следует

$$(3.3.32) \quad \begin{aligned} g(f(x+a)) - g(f(x)) &= \partial_{f(x)}g(f(x)) \circ \partial_x f(x) \circ a \\ &+ \partial_{f(x)}g(f(x)) \circ o_2(a) - o_1(\partial_x f(x) \circ a + o_2(a)) \end{aligned}$$

3.5 Запись

$$\partial_{f(x)}g(f(x)) = \frac{\partial g(f(x))}{\partial f(x)}$$

означает выражение

$$\partial_{f(x)}g(f(x)) = \partial_y g(y)|_{y=f(x)} = \left. \frac{\partial g(y)}{\partial y} \right|_{y=f(x)}$$

Аналогичное замечание верно для компонент производной.

Согласно определению 3.2.2

$$(3.3.33) \quad \begin{aligned} & \lim_{a \rightarrow 0} \frac{|\partial_{f(x)}g(f(x)) \circ o_2(a) - o_1(\partial_x f(x) \circ a + o_2(a))|}{|a|} \\ & \leq \lim_{a \rightarrow 0} \frac{|\partial_{f(x)}g(f(x)) \circ o_2(a)|}{|a|} + \lim_{a \rightarrow 0} \frac{|o_1(\partial_x f(x) \circ a + o_2(a))|}{|a|} \end{aligned}$$

Из (3.3.25) следует

$$(3.3.34) \quad \lim_{a \rightarrow 0} \frac{|\partial_{f(x)}g(f(x)) \circ o_2(a)|}{|a|} \leq G \lim_{a \rightarrow 0} \frac{|o_2(a)|}{|a|} = 0$$

Из (3.3.23) следует

$$\begin{aligned} & \lim_{a \rightarrow 0} \frac{|o_1(\partial_x f(x) \circ a + o_2(a))|}{|a|} \\ & = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{|o_1(\partial_x f(x) \circ a + o_2(a))|}{|\partial_x f(x) \circ a + o_2(a)|} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{|\partial_x f(x) \circ a + o_2(a)|}{|a|} \\ & \leq \lim_{a \rightarrow 0} \frac{|o_1(\partial_x f(x) \circ a + o_2(a))|}{|\partial_x f(x) \circ a + o_2(a)|_2} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\|\partial_x f(x)\| |a| + |o_2(a)|}{|a|} \\ & = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{|o_1(\partial_x f(x) \circ a + o_2(a))|}{|\partial_x f(x) \circ a + o_2(a)|} \|\partial_x f(x)\| \end{aligned}$$

Согласно теореме 3.3.19

$$\lim_{a \rightarrow 0} (\partial_x f(x) \circ a + o_2(a)) = 0$$

Следовательно,

$$(3.3.35) \quad \lim_{a \rightarrow 0} \frac{|o_1(\partial_x f(x) \circ a + o_2(a))|}{|a|} = 0$$

Из равенств (3.3.33), (3.3.34), (3.3.35) следует

$$(3.3.36) \quad \lim_{a \rightarrow 0} \frac{|\partial_{f(x)}g(f(x)) \circ o_2(a) - o_1(\partial_x f(x) \circ a + o_2(a))|}{|a|} = 0$$

Согласно определению 3.3.1

$$(3.3.37) \quad (g \circ f)(x + a) - (g \circ f)(x) = \partial_x(g \circ f)(x) \circ a + o(a)$$

где

$$o : A \rightarrow A$$

такое непрерывное отображение, что

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{|o(a)|}{|a|} = 0$$

Равенство (3.3.26) следует из (3.3.32), (3.3.36), (3.3.37).

Из равенства (3.3.26) и теоремы 3.3.5 следует

$$\begin{aligned} (3.3.38) \quad & \frac{\partial_{st.0}(g \circ f)(x)}{\partial x} \circ a \frac{\partial_{st.1}(g \circ f)(x)}{\partial x} \\ & = \frac{\partial_{s.0}g(f(x))}{\partial f(x)} (\partial_x f(x) \circ a) \frac{\partial_{s.1}g(f(x))}{\partial f(x)} \\ & = \frac{\partial_{s.0}g(f(x))}{\partial f(x)} \frac{\partial_{t.0}f(x)}{\partial x} \circ a \frac{\partial_{t.1}f(x)}{\partial x} \frac{\partial_{s.1}g(f(x))}{\partial f(x)} \end{aligned}$$

(3.3.27) следуют из равенства (3.3.38).

□

Производная второго порядка отображения D -алгебры

4.1. Производная второго порядка отображения D -алгебры

Пусть D - полное коммутативное кольцо характеристики 0. Пусть A - ассоциативная D -алгебра. Пусть

$$f : A \rightarrow A$$

дифференцируемая функция. Согласно замечанию 3.3.3, производная является отображением

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} : A \rightarrow \mathcal{L}(D; A; A)$$

Согласно теореме 2.5.11, и определению 3.2.8, множество $\mathcal{L}(D; A; A)$ является банаховой D -алгеброй. Следовательно, мы можем рассмотреть вопрос, является ли отображение $\partial_x f$ дифференцируемым.

Согласно определению 3.3.1,

$$(4.1.1) \quad (\partial_x f \circ (x + a_2)) \circ a_1 - (\partial_x f \circ x) \circ a_1 = \partial_x(\partial_x f(x) \circ a_1) \circ a_2 + o_2(a_2)$$

где $o_2 : A \rightarrow \mathcal{L}(D; A; A)$ - такое непрерывное отображение, что

$$\lim_{a_2 \rightarrow 0} \frac{\|o_2(a_2)\|}{|a_2|} = 0$$

Согласно определению 3.3.1, отображение $\partial_x(\partial_x f(x) \circ a_1) \circ a_2$ линейно по переменной a_2 . Из равенства (4.1.1) следует, что отображение $\partial_x(\partial_x f(x) \circ a_1) \circ a_2$ линейно по переменной a_1 . Следовательно, отображение $\partial_x(\partial_x f(x) \circ a_1) \circ a_2$ билинейно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1.1. *Полилинейное отображение*

$$(4.1.2) \quad \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \circ (a_1; a_2) = \partial_{x^2}^2 f(x) \circ (a_1; a_2) = \partial_x(\partial_x f(x) \circ a_1) \circ a_2$$

называется **производной второго порядка отображения f** . \square

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1.2. Согласно определению 4.1.1 при заданном x производная второго порядка $\partial_{x^2}^2 f(x) \in \mathcal{L}(D; A, A; A)$. Следовательно, производная второго порядка отображения f является отображением

$$(4.1.3) \quad \partial_{x^2}^2 f : A \rightarrow \mathcal{L}(D; A, A; A)$$

Согласно теореме 2.4.9, мы можем также рассматривать отображение

$$\partial_{x^2}^2 f(x) \circ (a_1 \otimes a_2) = \partial_{x^2}^2 f(x) \circ (a_1; a_2)$$

Тогда

$$(4.1.4) \quad \begin{aligned} \partial_{x^2}^2 f(x) &\in \mathcal{L}(D; A \otimes A; A) \\ \partial_{x^2}^2 f : A &\rightarrow \mathcal{L}(D; A \otimes A; A) \end{aligned}$$

Мы будем пользоваться одним и тем же символом $\partial_{x^2}^2 f$ для обозначения отображений (4.1.3) и (4.1.4), так как по характеру аргумента ясно о каком отображении идёт речь. \square

ТЕОРЕМА 4.1.3. Мы можем представить производную второго порядка отображения f в виде

$$\begin{aligned} \partial_{x^2}^2 f(x) \circ (a_1; a_2) &= \left(\frac{\partial_{s,0}^2 f(x)}{\partial x^2} \otimes \frac{\partial_{s,1}^2 f(x)}{\partial x^2} \otimes \frac{\partial_{s,2}^2 f(x)}{\partial x^2}, \sigma_s \right) \circ (a_1; a_2) \\ &= \frac{\partial_{s,0}^2 f(x)}{\partial x^2} \sigma_s(a_1) \frac{\partial_{s,1}^2 f(x)}{\partial x^2} \sigma_s(a_2) \frac{\partial_{s,2}^2 f(x)}{\partial x^2} \end{aligned}$$

Мы будем называть выражение

$$\frac{\partial_{s,p}^2 f(x)}{\partial x^2} \quad p = 0, 1, 2$$

компонентой производной второго порядка отображения $f(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следствие определения 4.1.1, соглашения 3.3.4 и теоремы 2.5.19. \square

По индукции, предполагая, что определена производная $\partial_{x^{n-1}}^{n-1} f(x)$ порядка $n-1$, мы определим

$$(4.1.5) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n} \circ (a_1; \dots; a_n) &= \partial_{x^n}^n f(x) \circ (a_1; \dots; a_n) \\ &= \partial_x (\partial_{x^{n-1}}^{n-1} f(x) \circ (a_1; \dots; a_{n-1})) \circ a_n \end{aligned}$$

производную порядка n отображения f . Мы будем также полагать $\partial^0 f(x) = f(x)$.

4.2. Ряд Тейлора

Пусть D - полное коммутативное кольцо характеристики 0. Пусть A - ассоциативная D -алгебра. Пусть $p_n(x)$ - многочлен степени n , $n > 0$, одной переменной над D -алгеброй A .

ТЕОРЕМА 4.2.1. Для произвольного $m > 0$ справедливо равенство

$$(4.2.1) \quad \begin{aligned} \partial_{x^m}^m (f(x)x) \circ (h_1; \dots; h_m) &= \partial_{x^m}^m f(x) \circ (h_1; \dots; h_m)x \\ &+ \partial_{x^{m-1}}^{m-1} f(x) \circ (\widehat{h_1}; \dots; h_{m-1}; h_m)h_1 + \dots \\ &+ \partial_{x^{m-1}}^{m-1} f(x) \circ (h_1; \dots; h_{m-1}; \widehat{h_m})h_m \end{aligned}$$

где символ $\widehat{h^i}$ означает отсутствие переменной h^i в списке.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $m = 1$ - это следствие равенства (3.3.12)

$$\partial_x (f(x)x) \circ h_1 = (\partial_x f(x) \circ h_1)x + f(x)h_1$$

Допустим, (4.2.1) справедливо для $m - 1$. Тогда

$$\begin{aligned}\partial_{x^{m-1}}^{m-1}(f(x)x) \circ (h_1; \dots; h_{m-1}) &= \partial_{x^{m-1}}^{m-1}f(x) \circ (h_1; \dots; h_{m-1})x \\ &+ \partial_{x^{m-2}}^{m-2}f(x) \circ (\widehat{h_1}; \dots; h_{m-2}; h_{m-1})h_1 + \dots \\ &+ \partial_{x^{m-2}}^{m-2}f(x) \circ (h_1; \dots; h_{m-2}; \widehat{h_{m-1}})h_{m-1}\end{aligned}$$

Так как $\partial_x h_i = 0$, то, пользуясь равенством (3.3.12), получим

$$\begin{aligned}(4.2.2) \quad &\partial_{x^m}^m(f(x)x) \circ (h_1; \dots; h_{m-1}; h_m) \\ &= \partial_{x^m}^m f(x) \circ (h_1; \dots; h_{m-1}; h_m)x \\ &+ \partial_{x^{m-1}}^{m-1}f(x) \circ (h_1; \dots; h_{m-2}; h_{m-1})h_m \\ &+ \partial_{x^{m-1}}^{m-1}f(x) \circ (\widehat{h_1}; \dots; h_{m-2}; h_{m-1}; h_m)h_1 + \dots \\ &+ \partial_{x^{m-1}}^{m-1}f(x) \circ (h_1; \dots; h_{m-2}; \widehat{h_{m-1}}; h_m)h_{m-1}\end{aligned}$$

Равенства (4.2.1) и (4.2.2) отличаются только формой записи. Теорема доказана. \square

ТЕОРЕМА 4.2.2. Для произвольного $n \geq 0$ справедливо равенство

$$\frac{\partial^{n+1} p_n(x)}{\partial x^{n+1}} = 0$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $p_0(x) = a_0$, $a_0 \in D$, то при $n = 0$ теорема является следствием определения 3.3.1. Пусть утверждение теоремы верно для $n - 1$. Согласно теореме 4.2.1, при условии $f(x) = p_{n-1}(x)$ мы имеем

$$\begin{aligned}\partial_{x^{n+1}}^{n+1} p_n(x)(h_1; \dots; h_{n+1}) &= \partial_{x^{n+1}}^{n+1} (p_{n-1}(x) x a_n)(h_1; \dots; h_{n+1}) \\ &= \partial_{x^{n+1}}^{n+1} p_{n-1}(x)(h_1; \dots; h_{n+1}) x a_n \\ &+ \partial_{x^n}^n p_{n-1}(x)(\widehat{h_1}; \dots; h_n; h_{n+1}) h_1 a_n + \dots \\ &+ \partial_{x^n}^n p_{n-1}(x)(h_1; \dots; h_n; \widehat{h_{n+1}}) h_{n+1} a_n\end{aligned}$$

Согласно предположению индукции все одночлены равны 0. \square

ТЕОРЕМА 4.2.3. Если $m < n$, то справедливо равенство

$$\left. \frac{\partial^m p_n(x)}{\partial x^m} \right|_{x=0} = 0$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $n = 1$ справедливо равенство

$$\partial^0 p_1(0) = a_0 x a_1 = 0$$

Допустим, утверждение справедливо для $n - 1$. Тогда согласно теореме 4.2.1

$$\begin{aligned}\partial_{x^m}^m (p_{n-1}(x) x a_n)(h_1; \dots; h_m) &= \partial_{x^m}^m p_{n-1}(x)(h_1; \dots; h_m) x a_n \\ &+ \partial_{x^{m-1}}^{m-1} p_{n-1}(x)(\widehat{h_1}; \dots; h_{m-1}; h_m) h_1 a_n + \dots \\ &+ \partial_{x^{m-1}}^{m-1} p_{n-1}(x)(h_1; \dots; h_{m-1}; \widehat{h_m}) h_m a_n\end{aligned}$$

Первое слагаемое равно 0 так как $x = 0$. Так как $m - 1 < n - 1$, то остальные слагаемые равны 0 согласно предположению индукции. Утверждение теоремы доказано. \square

Если $h_1 = \dots = h_n = h$, то мы положим

$$\frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n} \circ h^n = \frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n} \circ (h_1; \dots; h_n)$$

Эта запись не будет приводить к неоднозначности, так как по числу аргументов ясно, о какой функции идёт речь.

ТЕОРЕМА 4.2.4. Для произвольного $n > 0$ справедливо равенство

$$\frac{\partial^n p_n(x)}{\partial x^n} \circ h^n = n! p_n(h)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $n = 1$ справедливо равенство

$$\frac{\partial p_1(x)}{\partial x} \circ h = \frac{\partial(a_0 x a_1)}{\partial x} \circ h = a_0 h a_1 = 1! p_1(h)$$

Допустим, утверждение справедливо для $n - 1$. Тогда согласно теореме 4.2.1

$$(4.2.3) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^n p_n(x)}{\partial x^n} \circ h^n &= \left(\frac{\partial^n p_{n-1}(x)}{\partial x^n} \circ h^n \right) x a_n + \left(\frac{\partial^{n-1} p_{n-1}(x)}{\partial x^{n-1}} \circ h^{n-1} \right) h a_n \\ &+ \dots + \left(\frac{\partial^{n-1} p_{n-1}(x)}{\partial x^{n-1}} \circ h^{n-1} \right) h a_n \end{aligned}$$

Первое слагаемое равно 0 согласно теореме 4.2.2. Остальные n слагаемых равны, и согласно предположению индукции из равенства (4.2.3) следует

$$\frac{\partial^n p_n(x)}{\partial x^n} \circ h = n \left(\frac{\partial^{n-1} p_{n-1}(x)}{\partial x^{n-1}} \circ h \right) h a_n = n(n-1)! p_{n-1}(h) h a_n = n! p_n(h)$$

Следовательно, утверждение теоремы верно для любого n . \square

Пусть $p(x)$ - многочлен степени n .^{4.1}

$$p(x) = p_0 + p_{1i_1}(x) + \dots + p_{ni_n}(x)$$

Мы предполагаем сумму по индексу i_k , который нумерует слагаемые степени k . Согласно теоремам 4.2.2, 4.2.3, 4.2.4

$$\partial^k p(0) \circ x = k! p_{ki_k}(x)$$

Следовательно, мы можем записать

$$p(x) = p_0 + \frac{1}{1!} \partial_x p(0) \circ x + \frac{1}{2!} \partial_{x^2}^2 p(0) \circ x^2 + \dots + \frac{1}{n!} \partial_{x^n}^n p(0) \circ x^n$$

Это представление многочлена называется **формулой Тейлора для многочлена**. Если рассмотреть замену переменных $x = y - y_0$, то рассмотренное построение остаётся верным для многочлена

$$p(y) = p_0 + p_{1i_1}(y - y_0) + \dots + p_{ni_n}(y - y_0)$$

откуда следует

$$\begin{aligned} p(y) &= p_0 + \frac{1}{1!} \partial_y p(y_0) \circ (y - y_0) + \frac{1}{2!} \partial_{y^2}^2 p(y_0) \circ (y - y_0)^2 + \dots \\ &+ \frac{1}{n!} \partial_{y^n}^n p(y_0) \circ (y - y_0)^n \end{aligned}$$

^{4.1}Я рассматриваю формулу Тейлора для многочлена по аналогии с построением формулы Тейлора в [14], с. 246.

Предположим, что функция $f(x)$ в точке x_0 дифференцируема до любого порядка.^{4.2}

ТЕОРЕМА 4.2.5. Если для функции $f(x)$ выполняется условие

$$f(x_0) = \frac{\partial f(x_0)}{\partial x} \circ h = \dots = \frac{\partial^n f(x_0)}{\partial x^n} \circ h^n = 0$$

то при $t \rightarrow 0$ выражение $f(x + th)$ является бесконечно малой порядка выше n по сравнению с t

$$f(x_0 + th) = o(t^n)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $n = 1$ это утверждение следует из равенства (3.3.5).

Пусть утверждение справедливо для $n - 1$. Для отображения

$$f_1(x) = \partial_x f(x) \circ h$$

выполняется условие

$$f_1(x_0) = \left. \frac{\partial f_1(x)}{\partial x} \right|_{x=x_0} \circ h = \dots = \left. \frac{\partial^{n-1} f_1(x)}{\partial x^{n-1}} \right|_{x=x_0} \circ h^{n-1} = 0$$

Согласно предположению индукции

$$f_1(x_0 + th) = o(t^{n-1})$$

Тогда равенство (3.3.3) примет вид

$$o(t^{n-1}) = \lim_{t \rightarrow 0, t \in R} (t^{-1} f(x + th))$$

Следовательно,

$$f(x + th) = o(t^n)$$

□

Составим многочлен

$$p(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!} \partial_x f(x_0) \circ (x - x_0) + \dots + \frac{1}{n!} \partial_{x^n} f(x_0) \circ (x - x_0)^n$$

Согласно теореме 4.2.5

$$f(x_0 + t(x - x_0)) - p(x_0 + t(x - x_0)) = o(t^n)$$

Следовательно, полином $p(x)$ является хорошей аппроксимацией отображения $f(x)$.

Если отображение $f(x)$ имеет производную любого порядка, то переходя к пределу $n \rightarrow \infty$, мы получим разложение в ряд

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f(x_0)}{\partial x^n} \circ (x - x_0)^n$$

который называется **рядом Тейлора**.

^{4.2}Я рассматриваю построение ряда Тейлора по аналогии с построением ряда Тейлора в [14], с. 248, 249.

Список литературы

- [1] Серж Ленг, Алгебра, М. Мир, 1968
- [2] А. Г. Курош, Курс высшей алгебры, М., Наука, 1968
- [3] Александр Клейн, Введение в математический анализ над телом, eprint [arXiv:0812.4763](#) (2010)
- [4] Александр Клейн, Представление универсальной алгебры, eprint [arXiv:0912.3315](#) (2010)
- [5] Александр Клейн, Многочлен над ассоциативной D -алгеброй, eprint [arXiv:1302.7204](#) (2013)
- [6] Александр Клейн, Линейное отображение D -алгебры, eprint [arXiv:1502.04063](#) (2015)
- [7] John C. Baez, The Octonions, eprint [arXiv:math.RA/0105155](#) (2002)
- [8] П. Кон, Универсальная алгебра, М., Мир, 1968
- [9] Paul M. Cohn, Algebra, Volume 1, John Wiley & Sons, 1982
- [10] Н. Бурбаки, Общая топология. Использование вещественных чисел в общей топологии.
перевод с французского С. Н. Крачковского под редакцией Д. А. Райкова,
М. Наука, 1975
- [11] Н. Бурбаки, Топологические векторные пространства, перевод с французского Д. А. Райкова, М. Иностранная литература, 1959
- [12] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, М. Едиториал УРСС, 2004
- [13] Постников М. М., Лекции по геометрии, семестр IV, Дифференциальная геометрия, М. Наука, 1983
- [14] Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, том 1, М. Наука, 1969
- [15] Алексеевский Д. В., Виноградов А. М., Лычагин В. В., Основные понятия дифференциальной геометрии
Итоги ВИНТИ 28
М. ВИНТИ, 1988
- [16] Richard D. Schafer, An Introduction to Nonassociative Algebras, Dover Publications, Inc., New York, 1995
- [17] Vadim Komkov, Variational Principles of Continuum Mechanics with Engineering Applications: Critical Points Theory,
Springer, 1986
- [18] V. I. Arnautov, S. T. Glavatsky, A. V. Mikhalev,
Introduction to the theory of topological rings and modules, Volume 1995,
Marcel Dekker, Inc, 1996

Предметный указатель

- A -число 13
- A -представление в Ω -алгебре 8
- D -алгебра 13
- D -модуль 10
- D -векторное пространство 10
- n -арная операция на множестве 7
- абсолютная величина 21
- алгебра над кольцом 13
- арность 7
- ассоциативная D -алгебра 14
- ассоциатор D -алгебры 14
- банахова D -алгебра 21
- векторное пространство над полем 10
- гомоморфизм 8
- декартова степень 7
- дифференциал отображения 23
- дифференцируемое отображение 23
- единичная сфера в D -алгебре 21
- закон ассоциативности 10
- закон дистрибутивности 10
- закон унитарности 10
- коммутативная D -алгебра 14
- коммутатор D -алгебры 14
- компонента производной 24
- компонента производной второго порядка 34
- линейное отображение 10, 15
- многочлен 18
- модуль над кольцом 10
- морфизм представлений Ω_1 -алгебры в Ω_2 -алгебре 9
- морфизм представлений из f в g 9
- морфизм представления f 9
- непрерывное отображение 22
- норма в D -алгебре 21
- норма на кольце 19
- норма отображения 22
- нормированная D -алгебра 21
- нормированное кольцо 19
- носитель Ω -алгебры 7
- область операторов 7
- однородный многочлен степени n 17
- одночлен степени k 17
- операция на множестве 7
- перестановка 10
- полилинейное отображение 11, 15
- полное кольцо 20
- последовательность Коши 20, 21
- предел последовательности 19, 21
- представление Ω_1 -алгебры A в Ω_2 -алгебре M 8
- преобразование универсальной алгебры 8
- приведенный морфизм представлений 9
- производная второго порядка 33
- производная отображения 23
- производная порядка n 34
- свободная алгебра над кольцом 13
- стандартная компонента производной 25
- стандартная компонента тензора 13
- стандартное представление производной 24
- структурные константы 15
- тензорная степень 13
- тензорное произведение 12
- топологическая D -алгебра 21
- топологическое кольцо 19
- универсальная алгебра 7
- фундаментальная последовательность 20, 21

центр D -алгебры A 14

эндоморфизм 8

эффективное представление Ω -алгебры 8

ядро D -алгебры A 14

Ω -алгебра 7

Специальные символы и обозначения

$A[x]$	A -алгебра многочленов над D -алгеброй A 18	$\mathcal{L}(D; A_1; A_2)$	множество линейных отображений 10, 15
(a, b, c)	ассоциатор D -алгебры 14	$\mathcal{L}(D; A_1, \dots, A_n; S)$	множество полилинейных отображений 15
$[a, b]$	коммутатор D -алгебры 14	$\mathcal{L}(D; A^n; S)$	множество n -линейных отображений 15
$A_k[x]$	A -модуль однородных многочленов над D -алгеброй A 17	$\text{End}(\Omega_2; A_2)$	множество преобразований универсальной алгебры M 8
A_Ω	Ω -алгебра 7	$N(A)$	ядро D -алгебры A 14
$A^{\otimes n}$	тензорная степень алгебры A 13	$A_1 \otimes \dots \otimes A_n$	тензорное произведение 12
B^A	декартова степень 7	$Z(A)$	центр D -алгебры A 14
C_{ij}^k	структурные константы 15	Ω	область операторов 7
$\frac{\partial_{s,p} f(x)}{\partial x}$	компонента производной отображения $f(x)$ 24	$\Omega(n)$	множество n -арных операторов 7
$\frac{\partial_{s,p}^2 f(x)}{\partial x^2}$	компонента производной второго порядка отображения $f(x)$ 34		
$\frac{\partial f(x)}{\partial x}$	производная отображения f 23		
$\frac{\partial_x f(x)}{\partial x}$	производная отображения f 23		
$\frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n}$	производная порядка n 34		
$\frac{\partial_{x^n}^n f(x)}{\partial x^n}$	производная порядка n 34		
$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}$	производная второго порядка 33		
$\partial_{x^2}^2 f(x)$	производная второго порядка 33		
df	дифференциал отображения f 23		
$\frac{\partial^{ij} f(x)}{\partial x}$	стандартная компонента производной 24		
$\ f\ $	норма отображения 22		
$a^{i_1 \dots i_n}$	стандартная компонента тензора 13		
$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$	предел последовательности 19		